Sei $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$.

Finde 3 Vektoren aus M, die eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stelle den vierten Vektor als Linearkomination dieser 3 Vektoren dar.

a) Beh: $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ bilden eine Basis

Bew: i) z.z. v_1, v_2, v_3 l.u.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3+z_1]{z_2-2z_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3+z_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Rg} M = 3 \Rightarrow$ Beh. i)

ii) da $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ 3 l.u. Vektoren bilden Basis $\square$

b) $v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ gesucht: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

LGS:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3+z_1]{z_2-2z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & -8 & 9 & -16 \\ 0 & 8 & 12 & 16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{z_3+z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & -8 & -9 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_2+9z_3 \\ z_1-4z_3}]{z_3:3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[z_1-6z_2]{z_2:(-8)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}$$