13.12.2003

Klausur I
Lineare Algebra für Informatiker

Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

Zeit: 120 Minuten.

In der Klausur sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden.
Wer mehr Papier benötigt, kann jederzeit welches nachbekommen.

Aufgabe 1. **(5 Punkte)**

Es seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 5 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_9$.

(1) Schreibe σ und τ in Zykelschreibweise. Gib die Ordnung von σ und von τ an.

(2) Berechne $\sigma^5 \circ \tau^2$ (in Zykelschreibweise).

(3) Bestimme die Signen ε_σ und $\varepsilon_{\sigma\circ\tau\circ\sigma}$.

(4) Schreibe τ als Produkt von Transpositionen der Form $(j, j+1)$, wobei $j \in [1, 8]$.

(5) Finde alle Untergruppen $U \leq \mathcal{S}_9$ mit $\#U = 25$.

Aufgabe 2. **(4 Punkte)**

(1) Finde ein $x \in \mathbf{F}_{11} \smallsetminus \{0\}$ mit $\{x^m \mid m \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{F}_{11} \smallsetminus \{0\}$.

(2) Konstruiere einen Körper mit 23 Elementen.

(3) Konstruiere einen Körper mit 25 Elementen.

(4) Bestimme $\{(x, y, z) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid x^4 + y^4 = 4z^4\}$ und begründe das Resultat.

Aufgabe 3. **(4+3 Punkte)**

Sei $K = \mathbf{F}_2$, und sei $V = \mathbf{F}_2^5$. Sei $T = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \rangle$, sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \rangle$.

(1) Bestimme eine Basis von $T \cap U$.
Berechne damit $\dim_{\mathbf{F}_2}(T + U)$ und entscheide, ob $T + U$ eine direkte Summe ist.

(2) Ergänze die Basis von $T \cap U$ aus (1) zu einer Basis von T, zu einer Basis von U und zu einer Basis von $T + U$.

Aufgabe 4. **(9 Punkte)**

Sei K ein Körper, sei V ein Vektorraum über K, und sei $V \xrightarrow{\varphi} V$ ein Endomorphismus.
Wähle eine Basis von V und gib bezüglich dieser Basis die beschreibende Matrix von φ und die beschreibende Matrix von φ^2 an.
Gib eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ und eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$ an.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $\varphi : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi_2+\xi_3 \\ -\xi_1+2\xi_2+\xi_3 \\ \xi_1-\xi_2 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{R}$, $V = \langle 1, X, X^2 \rangle \leq \mathbf{R}[X]$, $\varphi : f(X) \longmapsto f'(X) + f''(X)$.

(3) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_8$, $\varphi : \xi \longmapsto \xi^4 + \beta\xi$.

Aufgabe 5. **(3+2 Punkte)**

(1) Bestimme die Ordnung von $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_4)$. Hinweis: Sie ist kleiner als 10.

(2) Finde ein Element der Ordnung 3 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$.

Aufgabe 6. **(1+2+2 Punkte)**

Begründe die Antwort jeweils.

(1) Wieviele $\mathbf{F}_2$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{F}_2^2$ nach $\mathbf{F}_2^3$?

(2) Wieviele der linearen Abbildungen aus (1) sind injektiv ? Wieviele surjektiv ?

(3) Wieviele Untervektorräume gibt es im $\mathbf{F}_2$-Vektorraum $\mathbf{F}_2^3$?

Aufgabe 7. **(5 Punkte)**

Zeige oder widerlege.

(1) Seien V, W Vektorräume über einem Körper K, sei $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Tupel von Vektoren in V. Ist das Bildtupel $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ erzeugend in W, so ist auch $(x_1, \ldots, x_n)$ erzeugend in V.

(2) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K V = 4$, seien U_1, U_2 und U_3 Untervektorräume in V der Dimension 3. Dann ist $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \neq 0$.

(3) Sei G eine endliche Gruppe, sei $m \geq 1$ eine ganze Zahl, die $\#G$ teilt. Dann gibt es ein Element der Ordnung m in G.

(4) Sei p prim. In $\mathbf{F}_p[X]$ gilt $X^p - X = \prod_{a \in \mathbf{F}_p} (X - a)$.

(5) Ist $\sum_{j \geq 0} a_j X^j \in \mathbf{F}_9[X]$ irreduzibel, dann ist auch $\sum_{j \geq 0} a_j^3 X^j \in \mathbf{F}_9[X]$ irreduzibel.