14.02.2004

Klausur II
Lineare Algebra für Informatiker

Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

Zeit: 180 Minuten.

In der Klausur sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden.
Wer mehr Papier benötigt, kann jederzeit welches nachbekommen.

Aufgabe 1. **(10 Punkte)**

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ und sei $A \in K^{n \times n}$.
Bestimme die Determinante und die Inverse von A, falls möglich.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & \iota \\ \iota & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_9^{2\times 2}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ \beta^2 & \beta^2 & 1+\beta^2 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_8^{3\times 3}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_2^{4\times 4}$.

Aufgabe 2. **(1+3+1+1 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_4^{3\times 4}$, sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_4^3$, und sei $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_4^3$.

(1) Bestimme $\operatorname{rk} A$.

(2) Bestimme eine Basis des Lösungsraums $\{x \in \mathbf{F}_4^4 \mid Ax = 0\}$.

(3) Bestimme $\{x \in \mathbf{F}_4^4 \mid Ax = b\}$.

(4) Bestimme $\{x \in \mathbf{F}_4^4 \mid Ax = c\}$.

(Hinweis: forme simultan $(A|b|c)$ um.)

Aufgabe 3. **(2 × (3+6+1) Punkte)**

Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Bestimme jeweils

(a) das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ von A,

(b) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ derart, daß $S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform ist, und

(c) das Minimalpolynom $\mu_A(X)$ von A.

Die Matrizen seien hierzu gegeben durch

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

(2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. **(10 Punkte)**

Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hermitesch.

(a) Finde eine unitäre Matrix U so, daß $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Untersuche A mit (a) auf Definitheit und auf Semidefinitheit.

(c) Falls A positiv oder negativ definit ist, dann bestätige dies mit einem weiteren Kriterium.

Es sind (a, b, c) in den folgenden Fällen durchzuführen.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5. **(9 Punkte)**

(1) Sei $s \in \mathbf{R}$, sei $A = \begin{pmatrix} 1 & s & 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{5\times 5}$.
Berechne den Eintrag von A^{-1} an der Position $(1, 5)$.

(2) Berechne die Elementarteiler von $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{3\times 3}$.

(3) Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, und sei $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ für $n \geq 3$, wobei $a_n \in \mathbf{C}$ stets.
Berechne a_n für $n \geq 0$.

Aufgabe 6. **(5 Punkte)**

Sei $n \geq 1$ und seien $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Sind A und B nilpotent, so auch $A + B$.

(2) Sei $n = 2$. Es gibt eine Matrix $A \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mit $A^2 \neq 0$, aber $A^3 = 0$.

(3) Ist $AB = 0$, so ist $\chi_A(X)\chi_B(X) = X^n \chi_{A+B}(X)$.

(4) Ist $A^2 = E$, so ist A diagonalisierbar.

(5) Ist $A^2 = E$, so ist A unitär diagonalisierbar.