Lösung Klausur I
Lineare Algebra für Informatiker

Aufgabe 1.

(1) Es ist $\sigma = (1,9)(3,4,6,5,8)$, von Ordnung 10 und $\tau = (1,3)(2,4)(7,9,8)$, von Ordnung 6.

(2) Es ist $\sigma^5 \circ \tau^2 = (1,9) \circ (7,8,9) = (1,9,7,8)$.

(3) Es ist $\varepsilon_\sigma = -1$ und $\varepsilon_{\sigma\circ\tau\circ\sigma} = \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = +1$.

(4) Zum Beispiel kann man $\tau = (2,3)\circ(1,2)\circ(3,4)\circ(2,3)\circ(8,9)\circ(7,8)$ schreiben.

(5) Untergruppen $U \leq \mathcal{S}_9$ mit $\#U = 25$ gibt es keine, da 25 kein Teiler von 9! ist, es nach Lagrange aber sein müßte.

Aufgabe 2.

(1) Der Möglichkeiten sind folgende : $x \in \{2,-3,-4,-5\}$. Zum Beispiel ergibt sich

$$\{2^m \mid m \in \mathbf{Z}\} \;=\; \{2^m \mid m \in [0,9]\} \;=\; \{1,2,4,-3,5,-1,-2,-4,3,-5\}\,.$$

(2) Da 23 eine Primzahl ist, ist $\mathbf{F}_{23} = \mathbf{Z}/23\mathbf{Z}$ ein Körper.

(3) Man kann z.B. das irreduzible Polynom $f(X) = X^2 - 3 \in \mathbf{F}_5[X]$ von Grad 2 verwenden. Dies ist in der Tat irreduzibel, da es von Grad ≤ 3 ist, und da es keine Nullstellen in $\mathbf{F}_5 = \{-2,-1,0,1,2\}$ hat. Vielmehr werden $f(0) = 2$, $f(-1) = f(1) = -2$ und $f(-2) = f(2) = 1$. Der gesuchte Körper ergibt sich also z.B. zu $\mathbf{F}_5[X]/(X^2-3)\mathbf{F}_5[X]$.

(4) Es ist $\{(x,y,z) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x^4 + y^4 = 4z^4\} = \{(0,0,0)\}$. Wir haben die Annahme, es gäbe noch eine weitere Lösung, zum Widerspruch zu führen, und dürfen nach Division durch den größten gemeinsamen Teiler ohne Einschränkung von einem teilerfremden Tupel $(x,y,z) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ausgehen, für welches $x^4 + y^4 = 4z^4$ ist.

Modulo 5 ist $x^4 \in \{0,1\}$, und also $x^4 + y^4 \in \{0,1,2\}$. Modulo 5 ist aber auch $4z^4 \in \{0,4\}$, so daß modulo 5 auf beiden Seiten 0 stehen muß. Dies führt wiederum zu $x^4 \equiv_5 y^4 \equiv_5 z^4 \equiv_5 0$, und dies schließlich zu $x \equiv_5 y \equiv_5 z \equiv_5 0$, im Widerspruch zu (x,y,z) teilerfremd.

Aufgabe 3.

(1) Eine Basis von $T \cap U$ ist z.B. durch $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ gegeben.
Damit wird $\dim_{\mathbf{F}_2}(T+U) = \dim_{\mathbf{F}_2} T + \dim_{\mathbf{F}_2} U - \dim_{\mathbf{F}_2}(T\cap U) = 3+3-2 = 4$.
Ferner ist die Summe $T+U$ wegen $T\cap U \neq 0$ nicht direkt.

(2) Eine ergänzte Basis von T ist z.B. durch $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ gegeben, eine ergänzte Basis von U z.B. durch $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, und folglich eine ergänzte Basis von $T+U$ z.B. durch $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 4.

(1) Bezüglich der Standardbasis $\underline{e}$ von $\mathbf{R}^3$ ist $A(\varphi)_{\underline{e},\underline{e}} = \begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ und dementsprechend $A(\varphi^2)_{\underline{e},\underline{e}} = (A(\varphi)_{\underline{e},\underline{e}})^2 = \begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. Es ist z.B. $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ und z.B. $\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$.

(2) Es ist $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 1$ und $\varphi(X^2) = 2X+2$, und somit ist bezüglich der Basis $\underline{y} = (1,X,X^2)$ die beschreibende Matrix gegeben durch $A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}} = \begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, und somit $A(\varphi^2)_{\underline{y},\underline{y}} = (A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}})^2 = \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Es ist z.B. (1) eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ und z.B. $(1,X)$ eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$.

(3) Es ist $\varphi(1) = 1+\beta$, $\varphi(\beta) = \beta^4+\beta^2 = \beta$ und $\varphi(\beta^2) = \beta^8+\beta^3 = 1$. Bezüglich der Basis $\underline{y} = (1,\beta,\beta^2)$ von V erhalten wir somit $A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}} = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ und somit $A(\varphi^2)_{\underline{y},\underline{y}} = (A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}})^2 = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Es ist z.B. $(1+\beta+\beta^2)$ eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ und z.B. $(1,\beta)$ eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$.

Aufgabe 5.

(1) Mit $A := \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&\alpha&\alpha \end{pmatrix}$ wird $A^2 = \begin{pmatrix} 1&\alpha&\alpha \\ 0&1&0 \\ \alpha&1&\alpha \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} \alpha&1&\alpha \\ 0&1&0 \\ \alpha&\alpha&1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} \alpha&\alpha&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}$ und $A^5 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.
Also ist die gefragte Ordnung gleich 5.

(2) Es ist $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1&1 \\ 0&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1 \\ 1&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1&1 \\ 1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1&0 \\ 1&1 \end{smallmatrix}\right)\}$.
Von diesen Elementen haben $\left(\begin{smallmatrix} 0&1 \\ 1&1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1&1 \\ 1&0 \end{smallmatrix}\right)$ die Ordnung 3.

Aufgabe 6.

(1) Da jeder der beiden Standardbasisvektoren beliebig auf einen der 2^3 Vektoren in W abgebildet werden kann, gibt es $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ lineare Abbildungen von V nach W.

Alternative Begründung: Die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbf{F}_2^2$ nach $\mathbf{F}_2^3$ steht über die beschreibende Matrix in Bijektion zu $\mathbf{F}_2^{3\times 2}$, und diese Menge hat $2^{3\cdot 2}$ Elemente.

(2) Für die Injektivität muß das Bildtupel der Basis linear unabhängig sein. Dafür gibt es $(2^3-1)(2^3-2) = 42$ Möglichkeiten. Es gibt also 42 injektive lineare Abbildungen von $\mathbf{F}_2^2$ nach $\mathbf{F}_2^3$.

Für die Surjektivität müßte das Bildtupel erzeugend in $\mathbf{F}_2^3$ sein. Dies geht nicht, da in $\mathbf{F}_2^3$ jedes erzeugende Tupel von Länge > 3 ist. Folglich gibt es keine surjektiven linearen Abbildungen von $\mathbf{F}_2^2$ nach $\mathbf{F}_2^3$.

Alternative Begründung: Es gibt überhaupt keine surjektiven Abbildungen von $\mathbf{F}_2^2$ nach $\mathbf{F}_2^3$, da $\#(\mathbf{F}_2^2) = 4 < 8 = \#(\mathbf{F}_2^3)$.

(3) Von Dimension 0 gibt es einen Untervektorraum, von Dimension 3 ebenso. Von Dimension 1 gibt es $(8-1)/(2-1) = 7$ Untervektorräume. Von Dimension 2 gibt es $((8-1)(8-2))/((4-1)(4-2)) = 7$ Untervektorräume. Insgesamt gibt es in $\mathbf{F}_2^3$ also 16 Untervektorräume.

Aufgabe 7.

(1) Aussage ist falsch. Seien etwa $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $W = \mathbf{R}^1$, $n = 2$, $(x_1, x_2) = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$ und $f : V \longrightarrow W : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \longmapsto (\xi_1)$. Es ist $(f(x_1), f(x_2)) = ((1), (0))$ erzeugend in W, wiewohl (x_1, x_2) nicht erzeugend in V ist.

Kleineres Gegenbeispiel: $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^1$, $W = \mathbf{R}^0 = 0$, $n = 1$, $(x_1) = ((0))$ und $f : V \longrightarrow W : (\xi_1) \longmapsto 0$.

(2) Aussage ist wahr. In der Tat ist zunächst

$$\dim_K(U_1 \cap U_2) \;=\; \dim_K U_1 + \dim_K U_2 - \dim_K(U_1 + U_2) \;\geq\; 3 + 3 - 4 \;=\; 2\,,$$

und daher

$$\dim_K((U_1 \cap U_2) \cap U_3) \;=\; \dim_K(U_1 \cap U_2) + \dim_K U_3 - \dim_K((U_1 \cap U_2) + U_3) \;\geq\; 2 + 3 - 4 \;=\; 1\,.$$

(3) Aussage ist falsch. Seien etwa $G = \mathcal{S}_3$ und $m = 6 = \#G$. Die Elemente von $\mathcal{S}_3$ haben Ordnung 1, 2 oder 3, aber nicht 6.

(4) Aussage ist wahr. Denn durch Abdividieren sämtlicher Nullstellen in $\mathbf{F}_p$ sieht man, daß

$$X^p - X \;=\; f(X) \cdot \prod_{a \in \mathbf{F}_p} (X - a)$$

ist für ein $f(X) \in \mathbf{F}_p[X]$. Vergleich von Graden und Leitkoeffizienten gibt $f(X) = 1$.

(5) Aussage ist wahr. Schreibe $f(X) := \sum_{j \geq 0} a_j X^j$, $m := \deg f$ und $\tilde{f}(X) := \sum_{j \geq 0} a_j^3 X^j$. Aus $f(X)$ normiert folgt $\tilde{f}(X)$ normiert.

Sei $\tilde{f}(X) = g(X) \cdot h(X)$ angesetzt, $g(X) = \sum_{j \geq 0} b_j X^j$, $h(X) = \sum_{j \geq 0} c_j X^j$. Wir haben zu zeigen, daß $\deg g = 0$ oder $\deg h = 0$ ist. Nun ist aber

$$f(X) \;=\; \sum_{j \geq 0} a_j X^j \;=\; \sum_{j \geq 0} (a_j^3)^3 X^j \;=\; \left(\sum_{j \geq 0} b_j^3 X^j\right) \left(\sum_{j \geq 0} c_j^3 X^j\right)\,,$$

und aus $f(X)$ irreduzibel folgt $\deg\left(\sum_{j \geq 0} b_j^3 X^j\right) = 0$ oder $\deg\left(\sum_{j \geq 0} c_j^3 X^j\right) = 0$, und mithin $\deg g = 0$ oder $\deg h = 0$.