

# Lösung Klausur II

## Lineare Algebra für Informatiker

### Aufgabe 1.

- (1) Die Determinante ist  $\det A = -1$ , die Inverse ist  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ .
- (2) Die Determinante ist  $\det A = 0$ , die Inverse existiert nicht.
- (3) Die Determinante ist  $\det A = 1$ , die Inverse ist  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Aufgabe 2.

- (1) Es ist  $\text{rk } A = 2$ .
- (2) Es ist  $\{x \in \mathbf{F}_4^4 \mid Ax = 0\} = \langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ , eine Basis davon also z.B. gegeben durch  $\left( \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .
- (3) Es ist  $\{x \in \mathbf{F}_4^4 \mid Ax = b\} = \emptyset$ .
- (4) Es ist  $\{x \in \mathbf{F}_4^4 \mid Ax = 0\} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ .

### Aufgabe 3.

- (1) (a) Es ist  $\chi_A(X) = X^2(X + 1)$ .  
(b) Mit z.B.  $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  wird  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
(c) Es ist  $\mu_A(X) = X^2(X + 1)$ .
- (2) (a) Es ist  $\chi_A(X) = (X + 1)^5$ .  
(b) Mit z.B.  $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  wird  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  
(c) Es ist  $\mu_A(X) = (X + 1)^2$ .

### Aufgabe 4.

- (1) (a) Es ist  $\chi_A(X) = X(X - 2)$ . Mit z.B.  $U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  wird  $\bar{U}^t A U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  
(b) Wegen der Eigenwerte 0 und 2 ist  $A$  positiv semidefinit (aber nicht positiv definit).  
(c) Über positive Semidefinitheit gibt das Hauptminorenkriterium keine Aussage ab.
- (2) (a) Es ist  $\chi_A(X) = (X + 5)^2(X + 2)$ . Mit z.B.  $U = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  wird  $\bar{U}^t A U = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .  
(b) Wegen der Eigenwerte  $-5$  und  $-2$  ist  $A$  negativ definit.  
(c) Das Hauptminorenkriterium bestätigt mit  $\det A_1 = -4$ ,  $\det A_2 = +15$  und  $\det A_3 = -50$  die negative Definitheit von  $A$ .

### Aufgabe 5.

- (1) Mit der Cramerschen Regel berechnet sich der Eintrag an Position  $(1, 5)$  zu  $(\det A)^{-1}(-1)^{1+5} \det \begin{pmatrix} s & 1 & s & 1 \\ 1 & s & 1 & s \\ 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix} = (s^4 - s^2)/(1 + s^4 - s^2)$ .
- (2) Die Elementarteiler ergeben sich zu  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 6$  und  $d_3 = 6$ .

- (3) Wir setzen an mit  $\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ . Es wird  $\chi_A(X) = (X - 1)^3$ . Mit z.B.  $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  wird  $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: J$ . Insgesamt wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S J^n S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= S \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & 2n-n^2 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also  $a_n = 2n - n^2$ .

### Aufgabe 6.

- (1) Aussage ist falsch. Zum Beispiel sind  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  nilpotent, nicht aber  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (2) Aussage ist falsch. Sei ein solches  $A$  als existent angenommen, und sei  $S \in \text{GL}_2(\mathbf{C})$  mit  $J := S^{-1}AS$  in Jordanform. Aus  $J^3 = 0$  folgt, daß die Diagonaleinträge von  $J$  gleich 0 sind. Dann ist aber  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  oder  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , und jedenfalls  $J^2 = 0$ , im Widerspruch zu  $A^2 \neq 0$ .

Alternativ, ist  $A$  nilpotent, so ist  $\chi_A(X) = X^2$ , also  $\chi_A(A) = A^2 = 0$ .

- (3) Aussage ist richtig. Es wird

$$\begin{aligned} \chi_A(X)\chi_B(X) &= \det(XE - A)\det(XE - B) \\ &= \det((XE - A)(XE - B)) \\ &= \det(X^2E - X(A + B) + AB) \\ &= \det(X^2E - X(A + B)) \\ &= X^n \det(XE - (A + B)) \\ &= X^n \chi_{A+B}(X). \end{aligned}$$

- (4) Aussage ist richtig. Sei hierzu  $S \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  mit  $J := S^{-1}AS$  in Jordanform. Aus  $J^2 = E$  folgt, daß  $J$  bereits Diagonalgestalt hat, da sonst in  $J^2$  ein Eintrag  $2\lambda$  oberhalb der Diagonalen auftritt, für einen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ .

Alternativ, aus  $A^2 - E = 0$  folgt, daß  $\mu_A(X)$  ein Teiler von  $X^2 - 1$  ist, also nur einfache Nullstellen aufweist, und  $A$  somit diagonalisierbar ist.

- (5) Aussage ist falsch. Zum Beispiel ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  als nichtdiagonale obere Dreiecksmatrix nicht normal, und mithin nicht unitär diagonalisierbar. Wohl ist aber  $A^2 = E$ .