M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 23.10.03, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 1

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei $f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ definiert durch $1 \longmapsto 2$, $2 \longmapsto 2$, $3 \longmapsto 3$, $4 \longmapsto 1$. Bestimme folgende Teilmengen.

(1) $f^{-1}(\{2,3,4\})$.

(2) $f(f^{-1}(f(\{2,3,4\})))$.

(3) $\big(f(\{1,3\}) \cap f(\{2,3\})\big) \smallsetminus f(\{1,3\} \cap \{2,3\})$.

(4) $\bigcap_{m \geq 0} f^m(\{1,2,3,4\})$.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei X eine endliche Menge mit $\#X = n$.

(1) Für welche $n \in \mathbf{N}$ ist $\#\{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ bijektiv}\} > \#\mathfrak{P}(X)$?

(2) Sei $X \xrightarrow{f} X$ eine Abbildung. Zeige, daß f injektiv ist genau dann, wenn f surjektiv ist.

(3) Bestimme $\mathfrak{P}(\emptyset)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ und $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$.

(4) Gib eine Bijektion an von $\mathfrak{P}(X)$ nach $\{X \xrightarrow{h} \{0,1\} \mid h \text{ beliebige Abbildung}\}$. Gib ihre Umkehrabbildung an.

(5) Bestimme $\#\{X \xrightarrow{f} X \mid \#f^2(X) = 1\}$ für $n \in [1,5]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei M eine Menge, und sei $M \times M \xrightarrow{*} M$, $(x,y) \longrightarrow x * y$ eine Operation auf M. Gib an, ob $(M,*)$ ein Monoid, ein abelsches Monoid, eine Gruppe oder eine abelsche Gruppe ist. Begründe nur, wenn ein Begriff *nicht* zutrifft.

(1) $(M,*) = (\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$.

(2) $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \smallsetminus \{(0,0)\}$, und $(x,y) * (x',y') := (xx', yy')$ für $x, y, x', y' \in \mathbf{R}$.

(3) Sei X eine Menge mit $\#X > 1$, sei M die Menge der Abbildungen von X nach X, und sei $f * g := f \circ g$ für $f, g \in M$.

(4) Sei X eine Menge mit $\#X > 1$, sei $M \subseteq \mathfrak{P}(X \times X)$ die Menge der Äquivalenzrelationen auf X, und sei $R * S := R \cap S$ für $R, S \in M$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeige, oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels.

(1) Ist eine Relation auf einer Menge X symmetrisch und transitiv, so ist sie auch reflexiv.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung, und sei auf X die Relation $(\sim)$ durch $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; f(x) = f(y)$ definiert. Es liegt eine Äquivalenzrelation vor.

(3) Sei $X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Es ist f surjektiv genau dann, wenn die Abbildung $\mathfrak{P}(Y) \longrightarrow \mathfrak{P}(X) : V \longmapsto f^{-1}(V)$ injektiv ist.

(4) Es gibt eine endliche Menge, auf der man genau 3 Äquivalenzrelationen definieren kann. (Diese Aussage ist durch Beispiel zu zeigen oder durch Begründung zu widerlegen.)