Blatt 10

Aufgabe 40 (9 Punkte).
Sei K ein Körper, sei $s \in K$ ein Parameter, seien $m,\, n \geq 1$, und sei $A \in K^{m\times n}$. Bestimme den Rang $\operatorname{rk} A$ in Abhängigkeit von s, sowie den Kern von $\varphi : K^n \longrightarrow K^m : x \longmapsto Ax$.

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 3 & 5 & 6s+1 \\ 2 & 3 & 4s+1 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & s^2-s+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & s & s \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_8$, $A = \begin{pmatrix} \beta s+\beta & s+\beta^2 & 1 & \beta^2 s+\beta^3 \\ \beta^6 & \beta^3 & \beta^6 & 1 \\ 1 & 1 & \beta^4 & \beta^3 \\ \beta s+\beta & s+\beta & \beta^5 & \beta^2 s+\beta^4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 41 (9 Punkte).
Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Berechne A^{-1}.
Berechne zur Probe AA^{-1} und $A^{-1}A$.

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 0 & i \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_4$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Aufgabe 42 (1+1+1+3+1 Punkte).
Seien $m,\, n \geq 1$, und sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{Z}^{m\times n}$. Sei $k \in [1, \min\{m,n\}]$. Ein $k \times k$-*Minor* von A ist die Determinante einer $k \times k$-Untermatrix $(a_{i_s,j_t})_{s,t} \in \mathbf{Z}^{k\times k}$ von A, wobei $i_s < i_{s+1}$ und $j_t < j_{t+1}$ stets. Sei $D_k(A) \geq 0$ der größte gemeinsame Teiler aller $k \times k$-Minoren von A.

(1) Sei $T = (t_{j,u})_{j,u} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Zeige, daß $D_k(A) = D_k(AT)$.
(Hinweis: es genügt zu zeigen, daß $D_k(A)$ ein Teiler von $D_k(AT)$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß jeder $k \times k$-Minor von AT eine $\mathbf{Z}$-Linearkombination von $k \times k$-Minoren von A ist.)

(2) Seien $d_1, \ldots, d_l$ Elementarteiler von A. Zeige, daß $D_k(A) = \prod_{j\in[1,k]} d_j$, falls $k \in [1,l]$ und $D_k(A) = 0$ sonst. Folgere, daß die Elementarteiler einer Matrix, die in Aufgabe 39 (1) als existent nachgewiesen wurden, auch eindeutig festliegen.
(Hinweis: Verwende Aufgabe 39 (1) zusammen mit $D_k(A) = D_k(SAT)$, wie aus (1) folgt.)

(3) Übertrage (1) und (2) sinngemäß auf den Fall einer Matrix $A \in K[X]^{m\times n}$.

(4) Überprüfe (1, 2, 3) an den Beispielen in Aufgabe 39 (3).

(5) Sei $A_{\mathbf{Q}}$ die Matrix A, gesehen als Element von $\mathbf{Q}^{m\times n}$. Sei p prim, und sei $A_{\mathbf{F}_p}$ die von A repräsentierte Matrix in $\mathbf{F}_p^{m\times n}$. Zeige, daß $\operatorname{rk}_{\mathbf{Q}} A_{\mathbf{Q}} \geq \operatorname{rk}_{\mathbf{F}_p} A_{\mathbf{F}_p}$.
(Hinweis: Smithsche Normalform.)

Aufgabe 43 (4 Punkte). Sei $n \geq 2$. Zeige oder widerlege.

(1) Sei $A = (i+j)_{i\in[1,n],\, j\in[1,n]} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Es ist $\operatorname{rk} A = 2$.

(2) Sei $A = (i \cdot j)_{i\in[1,n],\, j\in[1,n]} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Es ist $\operatorname{rk} A = 1$.

(3) Sei $A = (i^j)_{i\in[1,n],\, j\in[1,n]} \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Es ist $\operatorname{rk} A = n$.

(4) Sei K ein Körper mit $\#K = q$ Elementen, sei $m \geq n \geq 1$. Die Anzahl der surjektiven K-linearen Abbildungen von K^m nach K^n ist gleich der Anzahl der injektiven K-linearen Abbildungen von K^n nach K^m.