M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 15.01.04, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 11

Aufgabe 44 ($3 \times (2+1+2)$ Punkte).

Sei $n \geq 1$, sei K ein Körper, sei $s \in K$ ein Parameter, und sei $A \in K^{n \times n}$.

(a) Berechne die Determinante $\det A$ in Abhängigkeit von s.

(b) Für welche Werte von s ist A singulär?

(c) Bestimme für $s \in K$ mit A regulär den Eintrag an Position $(1, n)$ der Inversen A^{-1}, allerdings ohne die komplette Inverse zu berechnen.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2&1&0 \\ 3&2&7 \\ 5&3&s \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$, (2) $A = \begin{pmatrix} i&1&1&1 \\ 0&i&s&i \\ i&0&1&1 \\ 1&i&i&s \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 4}$, (3) $A = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&0 \\ \iota&0&1&s&\iota \\ s&1&0&1&\iota \\ 0&1&\iota&1&0 \\ 1&0&0&0&s \end{pmatrix} \in \mathbf{F}_9^{5\times 5}$.

Aufgabe 45 (9 Punkte).

Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Berechne die Determinante $\det A$.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0&1&1&\cdots&1 \\ 1&0&1&\cdots&1 \\ &&\ddots&& \\ 1&\cdots&1&0&1 \\ 1&\cdots&1&1&0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, (2) $A = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&\cdots&0 \\ 1&1&1&0&0&\cdots&0 \\ 0&1&1&1&0&\cdots&0 \\ &&\ddots&\ddots&\ddots&& \\ 0&\cdots&0&1&1&1&0 \\ 0&\cdots&0&0&1&1&1 \\ 0&\cdots&0&0&0&1&1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$,

(3) $A = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&\cdots&1 \\ 0&0&0&1&1&\cdots&1 \\ 1&0&0&0&1&\cdots&1 \\ &&\ddots&\ddots&\ddots&& \\ 1&\cdots&1&0&0&0&1 \\ 1&\cdots&1&1&0&0&0 \\ 1&\cdots&1&1&1&0&0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 46 (4 Punkte).

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ und sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Sei $b \in K^n$, und sei $x \in K^n$ die nun eindeutige Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Schreibe $b = (\vartheta_i)_i$, $x = (\xi_i)_i$ und $A = (a_{i,j})_{i,j}$ in Koordinaten. Zeige, daß für $i \in [1, n]$

$$\xi_i \;=\; (\det A)^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & \vartheta_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & \vartheta_2 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & \vartheta_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Cramer und Laplace. — Manchmal wird auch der Inhalt der vorliegenden Aufgabe als Cramersche Regel bezeichnet. Sie ist zur praktischen Berechnung von x meist wenig hilfreich.)

Aufgabe 47 (3 Punkte). Steinitzscher Austauschsatz.

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ über einem Körper K, und seien $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ Basen von V. Zeige, daß es für alle $k \in [1, n]$ ein $j \in [1, n]$ so gibt, daß $(x_1, \ldots, \underbrace{y_k}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{k\text{-te Stelle}}, \ldots, y_n)$ Basen von V sind. (Hinweis: Laplace.)

Aufgabe 48 (2 Punkte).

Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Es ist $A - A^{\mathrm{t}}$ singulär.

(2) Ist n ungerade, so ist $A - A^{\mathrm{t}}$ singulär.