M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 22.01.04, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 12

Aufgabe 48 (4+4+4+6 Punkte).

Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$.

(a) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

(b) Berechne Basen der Eigenräume $E_A(\lambda)$ und die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

(c) Berechne Basen der Haupträume $H_A(\lambda)$ und verifiziere die direkte Zerlegung von $\mathbf{C}^n$ in Haupträume.

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 8 & -11 & 12 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, (2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ -1-i & 1+i & i \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix}$, (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Hinweis: Hat $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ nur ganzzahlige Nullstellen, so teilt jede von ihnen $f(0)$.)

Aufgabe 49 (8 Punkte).

Berechne $\chi_A(X)$ und eine Basis der Eigenräume von A.

(1) Sei $A = (1)_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{n\times n}$.

(2) Sei $n \geq 1$, seien $a_j \in \mathbf{C}$, und sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{n\times n}$. (Hinweis: faktorisiere $\chi_A(X) = \prod_{j\in[1,k]}(X-\lambda_j)^{m_j}$ und rechne mit den aus theoretischen Gründen existenten Nullstellen λ_j weiter.)

Aufgabe 50 (2 Punkte).

Sei K ein Körper, und sei $L = K(X) := \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid f(X) \in K[X],\ g(X) \in K[X] \setminus \{0\} \right\}$ der Körper der rationalen Funktionen über K (wobei die üblichen Bruchrechenregeln gelten).

Untersuche L auf algebraische Abgeschlossenheit, d.h. untersuche, ob es ein Polynom ohne Nullstellen von Grad ≥ 2 im Polynomring $L[Y]$ gibt.

Aufgabe 51 (5 Punkte).

Sei $n \geq 1$, seien $A,\ B \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Die Summe zweier Eigenvektoren von A ist wiederum ein Eigenvektor von A.

(2) Ist x ein Eigenvektor von A und von B, so auch von $A+B$.

(3) Sind x, y und z Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten, so ist (x, y, z) linear unabhängig.

(4) Sind $\xi,\ \eta \in \mathbf{C}$, so gibt es eine Matrix $A \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ mit $\det A = \xi$ und $\operatorname{tr} A = \eta$.

(5) Ist $\operatorname{rk} A = m < n$, so hat 0 die geometrische Vielfachheit $n-m$ als Eigenwert von A.