M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 29.01.04, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 13

Aufgabe 52 (4+4+6+8 Punkte).

Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Gib eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ so an, daß $S^{-1}AS$ in Jordanform ist. Gib das Minimalpolynom $\mu_A(X)$ von A an.

(1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 53 (8 Punkte).

Berechne $a_n \in \mathbf{C}$ für $n \geq 0$.

(1) Seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, und sei $a_n = 2a_{n-3} + 3a_{n-2}$ für $n \geq 3$.

(2) Seien $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, und sei $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + a_{n-4}$ für $n \geq 4$.

Aufgabe 54 (1+1+1+4 Punkte).

Sei K algebraisch abgeschlossen.

(1) Seien n, $m \geq 1$, sei $A \in K[X]^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$, und sei $B \in K[X]^{m\times m}$ mit $\det B \neq 0$. Für $\lambda \in K$ sei $\delta_i^A(\lambda) \geq 0$ der Exponent des Linearfaktors $(X - \lambda)$ im i-ten Elementarteiler $d_i^A(X)$ von A. Sei $C = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.
Zeige, daß $(\delta_1^C(\lambda), \ldots, \delta_{n+m}^C(\lambda))$ sich aus $(\delta_1^A(\lambda), \ldots, \delta_n^A(\lambda), \delta_1^B(\lambda), \ldots, \delta_m^B(\lambda))$ durch aufsteigende Sortierung ergibt.
(Hinweis: Verwende Minorencharakterisierung aus Aufgabe 42.)

(2) Sei $A = \lambda E_n + N_n \in K^{n\times n}$ ein Jordanblock, und sei $XE - A \in K[X]^{n\times n}$ seine *charakteristische Matrix.* Zeige, daß das Tupel der Elementarteiler von $XE - A$ gleich $(1, \ldots, 1, (X-\lambda)^n)$ ist. (Hinweis: Verwende Minorencharakterisierung aus Aufgabe 42.)

(3) Sei $A \in K^{n\times n}$. Zeige, daß $\mu_A(X)$ der n-te Elementarteiler von $XE - A$ ist, und daß $\chi_A(X)$ das Produkt aller Elementarteiler von $XE - A$ ist.
(Hinweis: Verwende (1, 2). Warum dürfen wir voraussetzen, daß A in Jordanform ist?)

(4) Berechne die Elementarteiler der charakteristischen Matrix $XE - A$, mit A wie in Aufgabe 52 (1, 2, 3, 4).

Aufgabe 55 (3 Punkte).

Sei $n \geq 1$, seien A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Sind A und B diagonalisierbar, so auch $A + B$.

(2) Ist A invertierbar, und haben alle Eigenwerte von A geometrische Vielfachheit 1, so haben auch alle Eigenwerte von A^{-1} geometrische Vielfachheit 1.

(3) Es ist A^{t} konjugiert zu A.