M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 05.02.04, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 14

Aufgabe 56 (9 Punkte).

Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, und seien $z,\ w \in \mathbf{C}$ Parameter. Bestimme die $z,\ w \in \mathbf{C}$ mit A

(a) normal,

(b) unitär,

(c) hermitesch.

(1) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+1 & z-1 \\ z-1 & z+1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{2\times 2}$ (kein w).

(2) $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8-3z & -2 & 2-6z \\ -2 & 5+3z & 4-6z \\ 2-6z & 4-6z & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$ (kein w).

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 57 (8 Punkte).

Sei $n \geq 0$, sei $U \leq \mathbf{C}^n$. Bestimme eine Orthonormalbasis von U.

(1) $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbf{C}^4$.

(2) $U = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbf{C}^5$.

Aufgabe 58 (4 Punkte).

Sei $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation. Bestimme die Eigenwerte der Permutationsmatrix $\pi(\sigma) \in \mathbf{C}^{n\times n}$ in Abhängigkeit von der Zykeldarstellung von σ. (Hinweis: Man kann sich im wesentlichen auf den Fall $\sigma = (1,2,3,\ldots,m)$ für ein $m \in [1,n]$ zurückziehen. Verwende Aufgabe 49.)

Aufgabe 59 (1+1+1+1+2+2+2 Punkte).

Sei $n \geq 1$, seien $A,\ B \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Ist A hermitesch und B unitär, so ist AB normal.

(2) Ist A unitär und hermitesch, so ist $A^2 = E$.

(3) Ist $A^2 - A - 2E = 0$, so ist A diagonalisierbar.

(4) Sind A und B nilpotent, so auch AB.

(5) Es ist die Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ diagonalisierbar genau dann, wenn A und B diagonalisierbar sind.

(6) Ist $AB = BA$, und sind A und B diagonalisierbar, so gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ mit $S^{-1}AS$ und *zugleich* $S^{-1}BS$ in Diagonalform.

(7) Ist $AB = BA$, so gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ mit $S^{-1}AS$ und *zugleich* $S^{-1}BS$ in Jordanform.