Klausur II, Samstag, 14.02.2004, 9h, Dauer 180 min. Hilfsmittel: 1 Blatt. Inhalt: Schwerpunkt Übungsblätter 9-15. **Hörsaaleinteilung** nach Nachnamen: H 22: A - Hof, H 3: Hog - Mz, H 1: N - Schl, H 2: Schm - Z.

M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 12.02.04, 13h30 (!), Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 15

Aufgabe 60 (20 Punkte).

Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$.

Falls möglich, gib eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ so an, daß $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ Diagonalgestalt annimmt.

Falls dies nicht möglich ist, so finde zumindest noch eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ so, daß $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Falls A hermitesch ist, dann untersuche A auf Definitheit und Semidefinitheit.
(Hinweis: Eigenwerte!)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4i \\ 3 & 1 & 0 \\ -4i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & 1 \\ 1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 4}$. (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{6\times 6}$.

Aufgabe 61 (2+4+4 Punkte).

Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ hermitesch. Untersuche A auf Definitheit und auf Semidefinitheit, d.h. entscheide, ob A positiv oder negativ definit ist, und entscheide, ob A positiv oder negativ semidefinit ist.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{2\times 2}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{3\times 3}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & i & -i \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -i & 2 & -4 & 0 \\ i & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{4\times 4}$.

Aufgabe 62 (7 Punkte).

Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Ist A unitär und $A - E$ nilpotent, so ist $A = E$.

(2) Ist $A = -\bar{A}^{\mathrm{t}}$, so sind alle ihre Eigenwerte in $i\mathbf{R}$.

(3) Ist A hermitesch, und sind alle ihre Einträge reell und positiv, so ist A positiv semidefinit.

(4) Ist $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, so ist $\mathrm{rk}(A - A^{\mathrm{t}}) \equiv_2 0$.

(5) Ist A hermitesch und negativ definit, so ist A^2 hermitesch und positiv definit.

(6) Ist $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ und ist $x^{\mathrm{t}}Ax = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$, so ist $A = 0$.

(7) Ist $\bar{x}^{\mathrm{t}}Ax = 0$ für alle $x \in \mathbf{C}^n$, so ist $A = 0$.