Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 2

Aufgabe 5 (6 Punkte). Gegeben seien die folgenden Permutationen aus $\mathcal{S}_7$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Gib σ, τ, σ^{-1}, τ^{-1}, $(\sigma \circ \tau)^2$ und $\tau^m \circ \sigma^n$ für $m, n \in \mathbf{Z}$ in Zykelschreibweise an und bestimme jeweils Ordnung und Signum.

Aufgabe 6 (6 Punkte). Bezeichne $\mathcal{A}_4 := \operatorname{Kern}(\mathcal{S}_4 \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\}) \leq \mathcal{S}_4$. Verwende nachfolgend nur die Zykelschreibweise.

(1) Erstelle die Verknüpfungstafel für $\mathcal{A}_4$.

(2) Finde alle 10 Untergruppen von $\mathcal{A}_4$ und gib jeweils an, ob diese abelsch sind.

Aufgabe 7 (3+1 Punkte). Sei $\mathcal{S}_4 \xrightarrow{f} \mathcal{S}_3$ der Gruppenmorphismus, der $(1,2) \longmapsto (1,2)$, $(2,3) \longmapsto (2,3)$ und $(3,4) \longmapsto (1,2)$ schickt. Die Existenz dieses Gruppenmorphismus werde als bekannt vorausgesetzt.

(1) Schreibe jedes Element von $\mathcal{S}_4$ als Produkt der Elemente $(1,2)$, $(2,3)$ und $(3,4)$ und bestimme so sein Bild unter f.

(2) Bestimme $\operatorname{Kern} f$. Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Aufgabe 8 (2+1 Punkte). Es sei auf der Menge $G := \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ die Verknüpfung

$$(x, y) \cdot (x', y') := (x + yx', yy')$$

erklärt.

(1) Zeige, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe bildet.

(2) Zeige, dass $U := \{\, (x, 1) \mid x \in \mathbf{R}\} \leq G$ und $V := \{\, (0, y) \mid y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\} \leq G$.

Aufgabe 9 (5 Punkte). Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus endlicher Gruppen. Sei $\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\} \leq G$ das *Zentrum* von G. Zeige, oder widerlege mit Gegenbeispiel.

(1) Ist $V \leq H$, so ist $f^{-1}(V) \leq G$.

(2) Ist $g \in G$, so stimmt die Ordnung von g mit der von $f(g) \in H$ überein.

(3) Ist f surjektiv, so ist $f(\mathrm{Z}(G)) \subseteq \mathrm{Z}(H)$.

(4) Ist G nicht abelsch, so ist $\mathrm{Z}(G) = \{1\}$.

(5) Ist p prim und teilt p die Anzahl der Elemente von G, so gibt es ein Element der Ordnung p in G. (Hinweis: Sei $M := \{(g_1, g_2, \ldots, g_p) \in G \times \cdots \times G \mid g_1 g_2 \cdots g_p = 1\}$. Zeige, dass $\#M$ durch $\#G$ geteilt wird, und dass M stabil unter zyklischer Vertauschung der Tupeleinträge ist.)