M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 06.11.03, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 3

Aufgabe 10 (6 Punkte).

Gib die Multiplikationstafeln von $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ an.

Aufgabe 11 (4 Punkte).

(1) Finde alle $x \in \mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ mit $\{x^m \mid m \in \mathbf{Z}\} = (\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}) \smallsetminus \{0\}$.

(2) Gib $G := \{x \in \mathbf{Z}/13\mathbf{Z} \mid x^4 = 1\}$ an. Zeige, dass G mit der Multiplikation aus dem Ring $\mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ eine Gruppe bildet, und gib ihre Multiplikationstafel an.

Aufgabe 12 (2+1+1+1 Punkte).

(1) Sind R und S Ringe, so zeige man, dass $R \times S$ mit der Addition $(r,s) + (r',s') := (r+r', s+s')$ und der Multiplikation $(r,s)\cdot(r',s') := (rr', ss')$, wobei $r, r' \in R$, $s, s' \in S$, wieder einen Ring bildet, und dass $R \times \{0\} = \{(x,0) \mid x \in R\} \subseteq R \times S$ darin ein Ideal ist.

(2) Seien $u, v \geq 2$ teilerfremde ganze Zahlen; d.h. es gebe keine Primzahl, die u und v teilt. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}/uv\mathbf{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Z}/u\mathbf{Z} & \times & \mathbf{Z}/v\mathbf{Z} \\ x + uv\mathbf{Z} & \longmapsto & (x + u\mathbf{Z} & , & x + v\mathbf{Z}) \end{array}$$

bijektiv ist. Hierbei haben wir zwecks besserer Unterscheidung die Restklasse von $x \in \mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}/u\mathbf{Z}$ als $\bar{x} = x + u\mathbf{Z}$ geschrieben, und ähnlich in den anderen beiden Ringen. (Hinweis: wieso genügt Injektivität?)

(3) Seien $a, b \in \mathbf{Z}$ beliebig. Zeige mit (2), dass es ein $x \in \mathbf{Z}$ gibt mit $x \equiv_u a$ und $x \equiv_v b$.

(4) Finde ein $x \in \mathbf{Z}$ mit $x \equiv_{15} 5$ und $x \equiv_{22} 1$.

Aufgabe 13 (4.5 Punkte).

(1) Zeige, dass $\{(x,y,z) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x^5 + 2y^5 = 5z^5\} = \{(0,0,0)\}$. In anderen Worten, zeige, dass $x^5 + 2y^5 = 5z^5$ in den ganzen Zahlen nur trivial lösbar ist. (Hinweis: betrachte modulo 11.)

(2) Zeige, dass $\{(x,y,z) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x^3 + 2y^3 = 4z^3\} = \{(0,0,0)\}$. (Hinweis: betrachte modulo 2, betrachte dann modulo 4, betrachte dann modulo 8.)

(3) Sei $p \geq 5$ prim. Zeige, dass $\{(x,y,z) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x^{p-1} + y^{p-1} = 3z^{p-1}\} = \{(0,0,0)\}$.

Aufgabe 14 (4 Punkte). Zeige, oder widerlege mit Gegenbeispiel.

(1) Sei $n \geq 1$, sei $\sigma \in \mathcal{S}_{4n}$ durch $i \longmapsto 4n+1-i$ definiert, $i \in [1, 4n]$. Dann ist $\varepsilon_\sigma = 1$.

(2) Sei $n \geq 1$. Für $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ist $\sigma^{n!} = 1$.

(3) Ist x Element eines kommutativen Rings, und ist $x^2 = x$, so ist $x \in \{0,1\}$.

(4) In einem kommutativen Ring R mit $1 < \#R < \infty$ gibt es ein Ideal I so, dass R/I ein Körper ist.