M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 20.11.03, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 5

Aufgabe 20 (7.5 Punkte). Sei K ein Körper, sei V ein Vektorraum über K. Entscheide, ob das Tupel $\underline{x}$ von Vektoren von V linear unabhängig ist.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $\underline{x} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

(2) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $\underline{x} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

(3) $K = \mathbf{F}_5$, $V = \mathbf{F}_5^3$, $\underline{x} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

(4) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_8$, $\underline{x} = (\beta^3, \beta^4, \beta^5)$.

(5) $K = \mathbf{F}_8$, $V = \mathbf{F}_8$, $\underline{x} = (\beta^3, \beta^4, \beta^5)$.

Aufgabe 21 (8 Punkte). Sei K ein Körper, sei V ein Vektorraum über K. Sei $\underline{x}$ ein Tupel von Vektoren in V. Entscheide, ob y in dessen Erzeugnis liegt, d.h. ob $y \in \langle \underline{x} \rangle$.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^2$, $\underline{x} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^3$, $\underline{x} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ i \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$.

(3) $K = \mathbf{F}_9$, $V = \mathbf{F}_9^3$, $\underline{x} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ \iota \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \iota \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} -\iota \\ 1 \\ \iota \end{smallmatrix}\right)$.

(4) $K = \mathbf{F}_2$, $V = \mathbf{F}_2[X]$, $\underline{x} = ((X+1)^2, (X+1)^3, (X+1)^4)$, $y = X^3 + X$.

Aufgabe 22 (1+1+2 Punkte). Sei p prim, sei M_p die Menge der Abbildungen von $\mathbf{F}_p$ nach $\mathbf{F}_p$.

(1) Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}_p[X]/(X^p - X)\mathbf{F}_p[X] & \xrightarrow{\varphi} & M_p \\ \overline{f(X)} & \longmapsto & (x \longmapsto f(x)) \end{array}$$

existiert. D.h. zeige, daß zwei Repräsentanten derselben Restklasse auf dasselbe Element abgebildet werden.

(2) Zeige, daß φ bijektiv ist. (Hinweis: Wieso genügt injektiv?)

(3) Bestimme für gegebenes $y \in \mathbf{F}_p$ ein Polynom $f_y(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ von Grad $\deg f_y \leq p - 1$ so, daß $f_y(y) = 1$ und $f_y(x) = 0$ für $x \in \mathbf{F}_p \smallsetminus \{y\}$. Zeige damit erneut, daß φ surjektiv ist.

Aufgabe 23 (5 Punkte). Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $x, y, z \in V$. Zeige oder widerlege.

(1) Ist (x, y) linear abhängig, so auch (x, y, z).

(2) Ist $x \neq 0$, ist $y \notin \langle x \rangle$ und ist $z \notin \langle x, y \rangle$, so ist (x, y, z) linear unabhängig.

(3) Ist (x, y, z) linear unabhängig, so ist $x \notin \langle y, z \rangle$.

(4) Ist (x, y, z) linear unabhängig, so auch $(x + y, x + z, y + z)$.

(5) Ist $(x + y, x + z, y + z)$ linear unabhängig, so auch (x, y, z).