Blatt 6

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

Aufgabe 24 (8 Punkte).

Wähle aus dem Tupel $\underline{x}$ von Vektoren von V eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ aus und gib die Dimension von $\langle \underline{x} \rangle$ an. Ergänze diese Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ zu einer Basis von V.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^4$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(3) $K = \mathbf{F}_3$, $V = \langle 1, X, X^2, X^3, X^4 \rangle \leq \mathbf{F}_3[X]$, $\underline{x} = ((X-1)^4, (X-1)^3, X^4 - X)$.

(4) $K = \mathbf{F}_8$, $V = \mathbf{F}_8^3$, $\underline{x} = \left(\begin{pmatrix} \beta+1 \\ \beta^2+\beta \\ \beta^2+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ \beta^2+\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta^2+1 \\ 1 \\ \beta^2 \end{pmatrix} \right)$.

Aufgabe 25 (9 Punkte).

Seien $T, U \leq V$ Untervektorräume. Gib Basen von $T \cap U$ und $T + U$ an und entscheide, ob die Summe $T + U$ direkt ist.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(2) $K = \mathbf{F}_3$, $V = \mathbf{F}_3^5$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(3) $K = \mathbf{F}_4$, $V = \mathbf{F}_4^5$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 26 (4.5 Punkte).

Sei $V = K^n$. Wieviele linear unabhängige Tupel von Länge d gibt es in V ? (Umgeordnete Tupel gelten natürlich als verschieden.) Wieviele verschiedene Basen enthält ein Untervektorraum von V von Dimension d ? Wieviele Untervektorräume von Dimension d gibt es also in V ?

(1) $K = \mathbf{F}_3$, $n = 2$, $d = 1$.

(2) $K = \mathbf{F}_5$, $n = 3$, $d = 2$.

(3) p prim, $K = \mathbf{F}_p$, $n \geq 1$, $d \in [0, n]$.

Aufgabe 27 (5 Punkte).

Seien U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V. Zeige oder widerlege.

(1) Es ist $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Basis von V genau dann, wenn alle $x_j \neq 0$ sind und $V = \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_n \rangle$ ist.

(2) Ist $U_1 \cap U_2 = 0$ und $U_1 \cap U_3 = 0$, so ist auch $U_1 \cap (U_2 + U_3) = 0$.

(3) Ist $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = 0$, so ist die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ direkt.

(4) Ist $U_1 \cap U_2 = 0$, $U_1 \cap U_3 = 0$ und $U_2 \cap U_3 = 0$, so ist die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ direkt.

(5) Ist $U_1 \cap U_2 = 0$ und $(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0$, so ist die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ direkt.