M. Künzer, J. Marhenke   Abgabe bis Donnerstag, 04.12.03, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 7

Aufgabe 28 (9 Punkte).

Sei $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W über dem Körper K. Entscheide, ob f injektiv oder surjektiv ist. Gib eine Basis von $\operatorname{Kern} f$ und von $\operatorname{Im} f$ an.

(1) $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathbf{R}^3$, $f : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 \\ \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_3 - \xi_1 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{F}_9$, $V = \mathbf{F}_9^4$, $W = \mathbf{F}_9^3$, $f : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \iota\xi_1 - \xi_2 \\ \iota\xi_2 - \xi_3 \\ \iota\xi_3 - \xi_4 \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_3$, $V = \mathbf{F}_9$, $W = \mathbf{F}_9$, $f : \xi \longmapsto \xi^3 - \xi$.

Aufgabe 29 (9 Punkte).

Sei K ein Körper, sei $K[X] \xrightarrow{\varphi} K[X]$ eine Abbildung. Untersuche φ auf Linearität, Injektivität und Surjektivität.

(1) $K = \mathbf{R}$, $\varphi : f(X) \longmapsto (X \cdot f(X))'$.

(2) $K = \mathbf{F}_5$, $\varphi : f(X) \longmapsto (X \cdot f(X))'$.

(3) $K = \mathbf{C}$, $\varphi : f(X) \longmapsto f(X^3)$.

(4) $K = \mathbf{C}$, $\varphi : f(X) \longmapsto f(X)^3$.

(5) $K = \mathbf{F}_3$, $\varphi : f(X) \longmapsto f(X)^3$.

(6) $K = \mathbf{C}$, $\varphi : f(X) \longmapsto f(f(f(X)))\ (=: f^3(X)\,)$.

Aufgabe 30 (4 Punkte).

(1) Wieviele injektive $\mathbf{F}_3$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{F}_3^3$ nach $\mathbf{F}_3^4$?

(2) Wieviele surjektive $\mathbf{F}_3$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{F}_3^4$ nach $\mathbf{F}_3^3$?

Aufgabe 31 (4 Punkte).

Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeige oder widerlege.

(1) Sei $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung, und sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein Tupel von Vektoren in V.
Ist $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ linear unabhängig, so auch $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(2) Seien $U \xrightarrow{f} V$ und $V \xrightarrow{g} W$ surjektive lineare Abbildungen.
Es ist $\dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Kern} g = \dim \operatorname{Kern}(g \circ f)$.

(3) Seien $U \xrightarrow{f} V$ und $V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen.
Es ist $\dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Kern} g = \dim \operatorname{Kern}(g \circ f)$.

(4) Sei $V \xrightarrow{f} V$ eine lineare Abbildung. Es gibt ein $n \geq 1$ mit $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}$.
Ferner, für dasselbe n ist auch $\operatorname{Kern} f^n = \operatorname{Kern} f^{n+1}$.