Klausur I, Samstag, 13.12.2003, 9h, Dauer 120 min. Hilfsmittel: 1 Blatt. Inhalt: Übungsblätter 1-8.
Hörsaaleinteilung nach Nachnamen: H 6: A - Bia, H 11: Bie - Ga, H 12: Ge - Ho, H 14: Hu - Man, H 15: Mau - Rom, H 16: Rot - Sta, H 20: Sti - Z.

M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 11.12.03, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 8

Aufgabe 32 (6 Punkte).

Seien A, B und C Matrizen mit Einträgen in einem Körper K.
Berechne ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, sofern definiert.

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{F}_4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha+1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 33 (8 Punkte).

Sei $V \xrightarrow{\varphi} V$ eine Endomorphismus des Vektorraums V über dem Körper K. Gib die beschreibenden Matrizen $A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}}$ und $A(\varphi^3)_{\underline{y},\underline{y}}$ bezüglich der Basis $\underline{y}$ von V an.
(Erinnerung: $\varphi^3 := \varphi \circ \varphi \circ \varphi$, Hinweis: $A(\varphi^3)_{\underline{y},\underline{y}} = (A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}})^3$.)

(1) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^3$, $\underline{y} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\varphi : \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}(1+i)\xi_1+(1+i)\xi_2+i\xi_3\\ -i\xi_1-i\xi_2+(1-i)\xi_3\\ -\xi_1-\xi_2-\xi_3\end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{F}_7$, $V = \mathbf{F}_7^3$, $\underline{y} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\varphi : \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}3\xi_1+2\xi_2-3\xi_3\\ 3\xi_1+\xi_2-2\xi_3\\ -3\xi_1+\xi_2-3\xi_3\end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{R}$, $V = \langle 1, X, X^2\rangle \leq \mathbf{R}[X]$, $\underline{y} = (1, (1+X), (1+X)^2)$, $\varphi : f(X) \longmapsto (f(X^2))''$.

(4) $K = \mathbf{F}_5$, $V = \mathbf{F}_{125} := \mathbf{F}_5[X]/(X^3+X+1)\mathbf{F}_5[X]$, $\gamma := \overline{X}$, $\varphi : \xi \longmapsto \xi^5$, $\underline{y} = (1, \gamma, \gamma^2)$.

Aufgabe 34 (4 Punkte).

(1) Berechne die Ordnung von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_3)$.

(2) Gib ein Element der Ordnung 5 in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_9)$ an.

Aufgabe 35 (8 Punkte).

Zeige oder widerlege.

(1) Sei $p \geq 3$ prim. Es gibt ein $a \in \mathbf{F}_p$ derart, daß $X^2 - a \in \mathbf{F}_p[X]$ irreduzibel ist.

(2) Sei K ein endlicher Körper. Es ist $\lim_{n\to\infty} \#(\mathrm{GL}_n(K))/\#(K^{n\times n}) = 1$.

(3) Sei $V = \mathbf{R}[X]$, aufgefaßt als Vektorraum über $\mathbf{R}$.
Es ist $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}\, \mathbf{R}[X]$ endlichdimensional über $\mathbf{R}$.

(4) Sei $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W über einem Körper K. Es ist f surjektiv genau dann, wenn es eine injektive lineare Abbildung $V \xleftarrow{g} W$ mit $f \circ g = 1_W$ gibt.

(5) Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Ist $A^2 = 0$, so ist auch $A = 0$.

(6) Sei $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Ist $A^{\mathrm{t}}A = 0$, so ist auch $A = 0$.

(7) Sei $A \in \mathbf{F}_7^{2\times 2}$. Ist $A^{\mathrm{t}}A = 0$, so ist auch $A = 0$.

(8) Sei $A \in \mathbf{F}_7^{3\times 3}$. Ist $A^{\mathrm{t}}A = 0$, so ist auch $A = 0$.