M. Künzer, J. Marhenke Abgabe bis Donnerstag, 18.12.03, 15h30, Briefkasten vor H3

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Blatt 9

Aufgabe 36 (9 Punkte).

Sei K ein Körper, seien $m,\, n \in K$, sei $s \in K$ ein Parameter, sei $A \in K^{m\times n}$ und sei $b \in K^m$.
Bestimme $\{x \in K^n \mid Ax = b\}$ in Abhängigkeit von s (ggf. mit Fallunterscheidungen).

(1) $K = \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2s & 1+2s \\ 1 & s & 1+s \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3-s \\ 2-s \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{C}$, $A = \begin{pmatrix} i & s-1 & 0 & -s \\ -i & 0 & 1 & s \\ 1-i & 1-s & i & s \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1-s \\ s \\ s-1 \end{pmatrix}$.

(3) $K = \mathbf{F}_8$, $A = \begin{pmatrix} s\beta^2 & s+s\beta & s & 0 \\ \beta^2 & 1+\beta & 1 & \beta \\ 1+\beta^2 & 1 & 0 & s \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$.

Aufgabe 37 (6 Punkte).

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei $V \xrightarrow{\varphi} V$ ein Endomorphismus. Seien $\underline{y}$ und $\underline{z}$ Basen von V. Ausgehend von der beschreibenden Matrix $A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}}$ ist die beschreibende Matrix $A(\varphi)_{\underline{z},\underline{z}}$ zu ermitteln.

(1) $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^2$, $\underline{y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\underline{z} = (\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix})$, $A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}} = \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$.

(2) $K = \mathbf{Q}$, $V = \langle 1, X, X^2\rangle \le \mathbf{Q}[X]$, $\underline{y} = (1, (1+X), (1+X)^2)$, $\underline{z} = (1, X, X^2)$, $A(\varphi)_{\underline{y},\underline{y}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 38 (6 Punkte).

Sei $n \ge 1$, sei $(\sim)$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{F}_2^{n\times n}$. Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen.

(1) Sei $n = 3$, und sei $A \sim B$ genau dann, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$ gibt mit $SA = B$.
(Hinweis: Repräsentanten in Zeilenstufenform.)

(2) Sei $n = 4$, und sei $A \sim B$ genau dann, wenn es $S,\, T \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{F}_2)$ gibt mit $SAT = B$.

(3) Sei $n = 2$, und sei $A \sim B$ genau dann, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ gibt mit $S^{-1}AS = B$.

Aufgabe 39 (2+2+3 Punkte). Elementarteiler.

(1) Seien $m,\, n \ge 1$ und sei $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$. Sei $\mathrm{GL}_m(\mathbf{Z}) := \mathrm{Inv}(\mathbf{Z}^{m\times m})$.
Zeige, daß es $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ so gibt, daß

$$SAT \;=\; \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_k & \\ & & & \\ \end{pmatrix} \;=:\; \mathrm{diag}_{m,n}(d_1,\dots,d_k) \;\in\; \mathbf{Z}^{m\times n}\;,$$

wobei $k \in [0, \min\{m,n\}]$, wobei d_j stets eine positive ganze Zahl ist, und wobei d_j stets d_{j+1} teilt. Die leergelassenen Einträge der Matrix $\mathrm{diag}_{m,n}(d_1,\dots,d_k)$ sind hierbei gleich 0. Die Zahlen $d_1, \dots, d_k$ heißen *Elementarteiler* von A, die Matrix $\mathrm{diag}_{m,n}(d_1,\dots,d_k)$ deren *Smithsche Normalform.*

(2) Analog, seien $m,\, n \ge 1$, sei K ein Körper, sei $A \in K[X]^{m\times n}$, und sei $\mathrm{GL}_m(K[X]) := \mathrm{Inv}(K[X]^{m\times m})$.
Zeige, daß es $S \in \mathrm{GL}_m(K[X])$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ so gibt, daß

$$SAT \;=\; \mathrm{diag}_{m,n}(d_1(X),\dots,d_k(X)) \;\in\; K[X]^{m\times n}\;,$$

wobei $k \in [0, \min\{m,n\}]$, wobei $d_j(X)$ stets ein normiertes Polynom ist, und wobei $d_j(X)$ stets $d_{j+1}(X)$ teilt.

(3) Berechne Elementarteiler von $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{2\times 3}$, von $\begin{pmatrix} -8 & 12 & -8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 10 & -10 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{3\times 3}$ und von $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathbf{R}[X]^{2\times 2}$.