M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 1

Aufgabe 1.

(1) Es ist $f^{-1}(\{2,3,4\}) = \{1,2,3\}$.

(2) Es ist $f(f^{-1}(f(\{2,3,4\}))) = f(f^{-1}(\{1,2,3\})) = f(\{1,2,3,4\}) = \{1,2,3\}$.

(3) Es ist $f(\{1,3\}) \cap f(\{2,3\}) = \{2,3\}$, wohingegen $f(\{1,3\} \cap \{2,3\}) = f(\{3\}) = \{3\}$. Insgesamt also $\Big(f(\{1,3\}) \cap f(\{2,3\})\Big) \smallsetminus f(\{1,3\} \cap \{2,3\}) = \{2\}$.

(4) Es ist $f(\{1,2,3,4\}) = \{1,2,3\}$, ferner $f(\{1,2,3\}) = \{2,3\}$ und schließlich $f(\{2,3\}) = \{2,3\}$. Also ist $\bigcap_{m\geq 0} f^m(\{1,2,3,4\}) = f^2(\{1,2,3,4\}) = \{2,3\}$.

Aufgabe 2.

(1) Es ist $\#\{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ bijektiv}\} = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 =: n!$, es ist $\#\mathfrak{P}(X) = 2^n$. Es ist $n! > 2^n$ für $n \geq 4$, da dies für $n < 4$ nicht zutrifft, da es für $n = 4$ zutrifft, und da für $n \geq 4$ beim Übergang von n nach $n+1$ die linke Seite stärker wächst als die rechte (formal: Induktion über n).

(2) Es ist f injektiv genau dann, wenn $\#f^{-1}(\{x\}) \leq 1$ für alle $x \in X$. Da $\sum_{x\in X} \#f^{-1}(\{x\}) = \#X = n$, und da nur n Summanden auftreten, muß diesenfalls stets $\#f^{-1}(\{x\}) = 1$ gelten, i.e. f muß bijektiv und insbesondere auch surjektiv sein.

Umgekehrt, es ist f surjektiv genau dann, wenn $\#f^{-1}(\{x\}) \geq 1$ für alle $x \in X$. Da $\sum_{x\in X} \#f^{-1}(\{x\}) = \#X = n$, und da n Summanden auftreten, muß diesenfalls stets $\#f^{-1}(\{x\}) = 1$ gelten, i.e. f muß bijektiv und insbesondere auch injektiv sein.

(3) Es ist $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, und $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(4) Wir haben

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{P}(X) & \xrightarrow{\sim} & \{X \xrightarrow{h} \{0,1\} \mid h \text{ beliebige Abbildung}\} \\ U & \longmapsto & h_U : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \notin U \end{cases} \\ h^{-1}(\{1\}) & \longleftarrow\!\shortmid & h\,. \end{array}$$

Die Abbildung h_U heißt auch *charakteristische Funktion* von U.

(5) Sei $x \in X$. Die gesuchte Anzahl ist $a(n) := \#\{X \xrightarrow{f} X \mid \#f^2(X) = 1\} = n\cdot\#\{X \xrightarrow{f} X \mid f^2(X) = \{x\}\}$.

Wir behaupten, daß $f^2(X) = \{x\}$ impliziert, daß $f(x) = x$. In der Tat, sei $f(x) = y \neq x$. Dann ist $f(y) = f^2(x) = x$ und also $f^2(y) = y \neq x$, Widerspruch.

Das Urbild $Y \subseteq X$ von $\{x\}$ unter f muß also x enthalten, ist ansonsten aber beliebig.

Fixieren wir ein solches Y mit $\#Y = m \in [1,n]$. Nun muß f die Teilmenge $X \smallsetminus Y$ nach $Y \smallsetminus \{x\}$ abbilden. Dafür gibt es $(m-1)^{n-m}$ Möglichkeiten. Hierbei ist $0^0 := 1$ gesetzt.

Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $\#Y = m$, die x enthält, gibt es $\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} =: \binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten. Insgesamt wird

$$a(n) = n \sum_{m\in[1,n]} \binom{n-1}{m-1} (m-1)^{n-m}\,.$$

Insbesondere werden $a(1) = 1$, $a(2) = 2$, $a(3) = 9$, $a(4) = 40$ und $a(5) = 205$.

Aufgabe 3.

(1) Es liegt ein abelsches Monoid vor. Es liegt keine Gruppe vor, da etwa 2 kein multiplikativ Inverses in $\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ besitzt.

(2) Es liegt ein abelsches Monoid vor. Es liegt keine Gruppe vor, da etwa $(1,0)$ kein multiplikativ Inverses in $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \smallsetminus \{(0,0)\}$ besitzt.

(3) Es liegt ein Monoid vor, mit 1_X als neutralem Element. Seien $x, y \in X$, $x \neq y$.

Es liegt keine Gruppe vor, da etwa die Abbildung $f : X \longrightarrow X$, die $y \longmapsto x$ schickt und alle anderen Elemente auf sich selbst abbildet (man schreibt $f|_{X \smallsetminus \{y\}} = 1_{X \smallsetminus \{y\}}$), kein Inverses besitzt.

Das Monoid ist nicht abelsch. Sei $g : X \longrightarrow X$ durch $x \longmapsto y$ und $g|_{X \smallsetminus \{x\}} = 1_{X \smallsetminus \{x\}}$ erklärt. Dann ist $(f \circ g)(x) = x$ und $(g \circ f)(x) = y$, also $f \circ g \neq g \circ f$.

(4) Es liegt ein abelsches Monoid vor. Beachte dafür, daß der Schnitt zweier Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist. Das neutrale Element ist durch $E := X \times X$ gegeben, d.h. durch die Äquivalenzrelation, die nur eine Äquivalenzklasse besitzt.

Sei $D := \{(x,x) \mid x \in X\}$ die Äquivalenzrelation, für die alle Äquivalenzrelationen genau ein Element enthalten. Es ist wegen Reflexivität D in jeder Äquivalenzrelation enthalten, d.h. $D \cap R = D$ für alle $R \in M$. Wegen $\#X > 1$ ist $D \neq E$, und folglich ist die Gleichung $D \cap R = E$ nicht lösbar mit $R \in M$. Damit liegt keine Gruppe vor.

Aufgabe 4.

(1) Aussage ist falsch. Sei $X = \{1,2\}$. Die Relation $R = \{(1,1)\}$ ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv, da $(2,2) \notin R$.

Noch kleineres Beispiel: $X = \{1\}$, $R = \emptyset$.

(2) Aussage ist richtig.

Reflexiv. Es gilt stets $x \sim x$, da stets $f(x) = f(x)$.

Symmetrisch. Aus $x \sim y$, d.h. aus $f(x) = f(y)$, folgt stets $f(y) = f(x)$, also $y \sim x$.

Transitiv. Aus $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h. aus $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, folgt stets $f(x) = f(z)$, d.h. $x \sim z$.

Wir bemerken noch, daß umgekehrt für eine gegebene Äquivalenzrelation die Abbildung $X \longrightarrow X/\sim$, $x \longmapsto \bar{x}$ existiert, die auf die beschriebene Weise die Äquivalenzrelation auch wieder hervorbringt.

(3) Aussage ist richtig.

Sei f surjektiv. Seien $V, V' \subseteq Y$ gegeben mit $f^{-1}(V) = f^{-1}(V')$. Ist $v \in V$, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = v$, und insbesondere ist $x \in f^{-1}(V)$. Also ist x auch in $f^{-1}(V')$, und es folgt $v = f(x) \in V'$. Damit ist $V \subseteq V'$ gezeigt. Genauso zeigt man $V' \subseteq V$.

Sei nun $\mathfrak{P}(Y) \longrightarrow \mathfrak{P}(X) : V \longmapsto f^{-1}(V)$ injektiv. Sei $y \in Y$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Aber es ist bereits $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, und aus $\{y\} \neq \emptyset$ folgt mit der gegebenen Injektivität, daß $f^{-1}(\emptyset) \neq f^{-1}(\{y\})$. Mithin gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

(4) Aussage ist falsch. Hier ist nun kein Gegenbeispiel zu geben, sondern eine Begründung anzuführen.

Auf der Menge $X = \emptyset$ kann man genau eine Äquivalenzrelation definieren, nämlich $R = \emptyset$.

Auf einer Menge $X = \{x\}$ aus einem Element kann man ebenfalls genau eine Äquivalenzrelation definieren, entsprechend der Partition $X = \{x\}$ in eine einzige Äquivalenzklasse.

Auf einer Menge $X = \{x,y\}$ aus zwei Elementen kann man genau zwei Äquivalenzrelation definieren, entsprechend der Partition $X = \{x\} \sqcup \{y\}$ und entsprechend der Partition $X = \{x,y\}$.

Auf einer Menge $X = \{x,y,z\}$ aus drei Elementen kann man genau fünf Äquivalenzrelation definieren, entsprechend den Partitionen

$$\begin{aligned} X &= \{x\} \sqcup \{y\} \sqcup \{z\} \\ &= \{x,y\} \sqcup \{z\} \\ &= \{x,z\} \sqcup \{y\} \\ &= \{y,z\} \sqcup \{x\} \\ &= \{x,y,z\}\,. \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, daß für eine Menge X mit $\#X > 3$ auch ≥ 5 Äquivalenzrelationen definiert werden können. Dazu nehme man 3 Elemente x, y, z aus X heraus und partitioniere sie wie eben angegeben. Die Komplementmenge $X \smallsetminus \{x,y,z\}$ lasse man eine weitere Äquivalenzklasse bilden. Damit sind schon einmal 5 verschiedene Äquivalenzrelationen auf X definiert. (In der Tat gibt es natürlich noch weit mehr.)

Damit kann der Fall, daß genau 3 Äquivalenzrelationen erklärbar sind, bei keiner Anzahl von Elementen von X eintreten.