M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 10

Aufgabe 40.

(1) Im Fall $s \neq -1$ ist $\operatorname{rk} A = 3$, und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist gegeben durch (). Für $s = -1$ ist $\operatorname{rk} A = 2$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(2) Im Fall $s \notin \{0, 1\}$, d.h. für $s = -1$, ist $\operatorname{rk} A = 3$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Für $s = 0$ ist $\operatorname{rk} A = 2$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Für $s = 1$ ist $\operatorname{rk} A = 2$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(3) Im Fall $s \neq 0$ ist $\operatorname{rk} A = 3$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1+\beta \\ \beta \\ \beta+\beta^2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Für $s = 0$ ist $\operatorname{rk} A = 2$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1+\beta+\beta^2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\beta+\beta^2 \\ \beta^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe 41. (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, (2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ -1 & -2i & i \end{pmatrix}$, (3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 0 & 1+\alpha \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Die Probe sollte jeweils $AA^{-1} = E$ und $A^{-1}A = E$ ergeben haben.

Aufgabe 42.

(1) Es genügt zu zeigen, dass $D_k(A)$ ein Teiler von $D_k(AT)$ ist für alle $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Hat man dies gezeigt, so folgt genauso, dass $D_k(AT)$ ein Teiler von $D_k((AT)T^{-1}) = D_k(A)$ ist. Wegen $D_k(A) \geq 0$ folgt dann auch $D_k(A) = D_k(AT)$.

Um zu zeigen, daß $D_k(A)$ ein Teiler von $D_k(AT)$ ist, genügt es zu zeigen, dass jeder $k \times k$-Minor von AT eine $\mathbf{Z}$-Linearkombination von Minoren von A ist. Dann teilt nämlich der größte gemeinsame Teiler $D_k(A)$ der $k \times k$-Minoren von A jeden $k \times k$-Minor von AT, und mithin auch $D_k(AT)$.

Sei $T = (t_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Es ist $AT = (\sum_{\nu_j \in [1,n]} a_{i,\nu_j} t_{\nu_j,j})_{i,j}$, wobei der Index j am Laufindex ν nur der Unterscheidbarkeit der Laufindizes dient.

Der $k \times k$-Minor von AT zu den Zeilenindizes $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ und den Spaltenindizes $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ hat die Gestalt

$$\det\left(\sum_{\nu_{j_w} \in [1,n]} a_{i_s,\nu_{j_w}} t_{\nu_{j_w},\, j_w}\right)_{s,w} .$$

Wegen der Multilinearität ist dieser Minor gleich

$$\sum_{\nu_{j_1} \in [1,n]} \cdots \sum_{\nu_{j_k} \in [1,n]} \left(\prod_{w \in [1,k]} t_{\nu_{j_w},\, j_w}\right) \det(a_{i_s,\nu_{j_w}})_{s,w} .$$

Enthält ein Tupel $(\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{j_w})$ zwei übereinstimmende Einträge an verschiedenen Positionen, so ist der zugehörige Summand $\det(a_{i_s,\nu_{j_w}})_{s,w}$ gleich 0. Anderenfalls ist wegen der Alternativität $\det(a_{i_s,\nu_{j_w}})_{s,w}$ bis auf Vorzeichen gleich einem $k \times k$-Minor von A. Damit ist die fragliche Mehrfachsumme in der Tat eine $\mathbf{Z}$-Linearkombination von $k \times k$-Minoren von A.

(2) Wegen Invarianz der Determinante unter Transposition und wegen (1) ist $D_k(A) = D_k(A^{\mathrm{t}}) = D_k(A^{\mathrm{t}}S^{\mathrm{t}}) = D_k((SA)^{\mathrm{t}}) = D_k(SA) = D_k(SAT)$ für $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Also dürfen wir mit 39 (1) die Matrix A in Smithscher Normalform als gegeben annehmen, um $D_k(A)$ zu bestimmen.

Sei also $A = (a_{i,j})_{i \in [1,m],\, j \in [1,n]} = \operatorname{diag}_{n,m}(d_1, \ldots, d_l)$ in Smithscher Normalform gegeben. Ihre $k \times k$-Minoren sind wegen Nullspalten allesamt gleich 0, mit Ausnahme *k-ten Hauptminors* $\det(a_{i,j})_{i \in [1,k],\, j \in [1,k]}$ oben links im Eck, welcher für $k \leq l$ gerade $\prod_{i \in [1,k]} d_i$ beträgt, und 0 für $k > l$. Und dieser Wert ist daher auch schon gleich $D_k(A)$.

Damit ist l eindeutig durch die Angabe von A festgelegt, und auch die Produkte d_1, $d_1 \cdot d_2$, ..., $d_1 \cdots d_l$, und somit auch die Elementarteiler d_1, d_2, ..., d_l selbst.

(3) Hier wählt man $D_k(A)$ normiert. Wir wollen zeigen, daß die Elementarteiler eindeutig durch Angabe von A festliegen.

Wir behaupten $D_k(A) = D_k(AT)$ für alle $T \in \mathrm{GL}_n(K[X])$. Es genügt zu zeigen, dass $D_k(A)$ ein Teiler von $D_k(AT)$ ist. Und dafür genügt es zu zeigen, dass jeder $k \times k$-Minor von AT eine $K[X]$-Linearkombination von $k \times k$-Minoren von A ist.

Sei $T = (t_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(K[X])$. Es ist $AT = (\sum_{\nu_j \in [1,n]} a_{i,\nu_j} t_{\nu_j,j})_{i,j}$.

Der $k \times k$-Minor von AT zu den Zeilenindizes $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ und den Spaltenindizes $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ hat die Gestalt

$$\det \left(\sum_{\nu_{j_w} \in [1,n]} a_{i_s,\nu_{j_w}} t_{\nu_{j_w},\, j_w} \right)_{s,w} .$$

Wegen der Multilinearität ist dieser Minor gleich

$$\sum_{\nu_{j_1} \in [1,n]} \cdots \sum_{\nu_{j_k} \in [1,n]} \left(\prod_{w \in [1,k]} t_{\nu_{j_w},\, j_w} \right) \det(a_{i_s,\nu_{j_w}})_{s,w} .$$

Enthält ein Tupel $(\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{j_w})$ zwei übereinstimmende Einträge an verschiedenen Positionen, so ist der zugehörige Summand $\det(a_{i_s,\nu_{j_w}})_{s,w}$ gleich 0. Anderenfalls ist wegen der Alternativität $\det(a_{i_s,\nu_{j_w}})_{s,w}$ bis auf Vorzeichen gleich einem $k \times k$-Minor von A. Damit ist die fragliche Mehrfachsumme in der Tat eine $K[X]$-Linearkombination von $k \times k$-Minoren von A. Dies zeigt die Behauptung.

Damit dürfen wir A als in Smithscher Normalform $A = \mathrm{diag}_{n,m}(d_1, \ldots, d_l)$ annehmen, um $D_k(A)$ zu berechnen, und erhalten $D_k(A) = \prod_{i \in [1,k]} d_i$ für $k \leq l$, und $D_k(A) = 0$ für $k > l$. Damit liegen die Elementarteiler von A eindeutig durch die Angabe von A fest.

(4) (1) $D_1(A) = \mathrm{ggT}(2,4) = 2$, $D_2(A) = \mathrm{ggT}(0,0,0) = 0$, also $d_1 = 2$.

(2) $D_1(A) = \mathrm{ggT}(2,4,6,\pm 8,\pm 10,12) = 2$, $D_2(A) = \mathrm{ggT}(-88,-80,-40,16,64,8,56,64) = 8$, $D_3(A) = \det(A) = 96$, also $d_1 = 2$, $d_2 = 8/2 = 4$ und $d_3 = 96/8 = 12$.

(3) $D_1(A) = \mathrm{ggT}(X,1,0) = 1$, $D_2(A) = \det(A) = X^2$, also $d_1 = 1$, $d_2 = X^2/1 = X^2$.

(5) Sei $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ so, daß SAT in Smithscher Normalform ist, sagen wir $SAT = \mathrm{diag}_{m,n}(d_1, \ldots, d_l)$. Dann ist $S_{\mathbf{Q}} \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Q})$ und $T_{\mathbf{Q}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$, also $\mathrm{rk}_{\mathbf{Q}} A_{\mathbf{Q}} = \mathrm{rk}_{\mathbf{Q}}(S_{\mathbf{Q}} A_{\mathbf{Q}} T_{\mathbf{Q}}) = \mathrm{rk}_{\mathbf{Q}}(SAT)_{\mathbf{Q}} = l$. Ferner ist $S_{\mathbf{F}_p} \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{F}_p)$ und $T_{\mathbf{F}_p} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$, also $\mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p} A = \mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}(S_{\mathbf{F}_p} A_{\mathbf{F}_p} T_{\mathbf{F}_p}) = \mathrm{rk}_{\mathbf{F}_p}(SAT)_{\mathbf{F}_p}$. Dieser Rang ist nun die Anzahl der Elementarteiler d_i, die nicht durch p teilbar sind, und diese Anzahl ist $\leq l$.

Aufgabe 43.

(1) Die Aussage ist wahr, wie man folgenden Umformungen bereits entnehmen kann.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n{+}1 \\ 3 & 4 & \cdots & n{+}2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n{+}1 & n{+}2 & \cdots & n{+}n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n{+}1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n{-}1 & n{-}1 & \cdots & n{-}1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & n{-}1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Die Aussage ist wahr. Zum Beweis addiere man das $(-i)$-fache der 1-ten Zeile zur i-ten Zeile für $i \geq 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Die Aussage ist wahr. Diese Aussage beweist man durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar wahr. Für $n \geq 2$ macht man Zeilen- und Spaltenumformungen, bis man die Induktionshypothese einsetzen kann.

$$\begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^1 & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & \cdots & 1^{n-1} \\ 2^0 & 2^1 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^0 & n^1 & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1^1-n^1 & \cdots & 1^{n-1}-n^{n-1} \\ 0 & 2^1-n^1 & \cdots & 2^{n-1}-n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)^1-n^1 & \cdots & (n-1)^{n-1}-n^{n-1} \\ 1 & n^1 & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1^1-n^1 & \cdots & 1^{n-1}-n^{n-1} \\ 0 & 2^1-n^1 & \cdots & 2^{n-1}-n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)^1-n^1 & \cdots & (n-1)^{n-1}-n^{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+n & \cdots & 1^{n-2}+1^{n-3}n+\cdots+n^{n-2} \\ 0 & 1 & 2+n & \cdots & 2^{n-2}+2^{n-3}n+\cdots+n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & (n-1)+n & \cdots & (n-1)^{n-2}+(n-1)^{n-3}n+\cdots+n^{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1^{n-2} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & (n-1) & \cdots & (n-1)^{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^{n-1} \\ 0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)^1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Die Aussage ist wahr. Denn die Menge der surjektiven linearen Abbildungen von K^m nach K^n steht über die beschreibende Matrix in Bijektion zur Menge der Matrizen von Rang n in $K^{n \times m}$. Und die Menge der injektiven linearen Abbildungen von K^n nach K^m steht über die beschreibende Matrix in Bijektion zur Menge der Matrizen von Rang n in $K^{m \times n}$. Schließlich stehen diese beiden Mengen von Matrizen über die Transposition in Bijektion zueinander. (Hierbei geht entscheidend ein, daß $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^{\mathrm{t}})$ für $A \in K^{n \times m}$ – das wußten wir bei Aufgabe 30 noch nicht.)