M. Künzer, J. Marhenke

Lösung 11

Aufgabe 44.

(1) (a) Wir rechnen z.B. $\det\begin{pmatrix} 2&1&0\\ 3&2&7\\ 5&3&s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2&1&0\\ -1&0&7\\ -1&0&s \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1&7\\ -1&s \end{pmatrix} = s-7$.

(b) A ist singulär, falls $s-7=0$, also für $s=7$.

(c) Der Eintrag von A^{-1} bei $(1,3)$ ist $(-1)^{3+1}(\det A)^{-1}\det A_{3,1} = (s-7)^{-1}\det\begin{pmatrix} 1&0\\ 2&7 \end{pmatrix} = \frac{7}{s-7}$.

(2) (a) Wir rechnen z.B. $\det\begin{pmatrix} i&1&1&1\\ 0&i&s&i\\ i&0&1&1\\ 1&i&i&s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} i&1&1&1\\ 0&i&s&i\\ 0&-1&0&0\\ 0&2i&2i&s+i \end{pmatrix} = i\det\begin{pmatrix} i&s&i\\ -1&0&0\\ 2i&2i&s+i \end{pmatrix} = i\det\begin{pmatrix} s&i\\ 2i&s+i \end{pmatrix} = i(s^2+is+2)$
$= i(s+2i)(s-i)$.

(b) A ist singulär für $s\in\{i,-2i\}$.

(c) Der Eintrag von A^{-1} bei $(1,4)$ ist $(-1)^{4+1}(\det A)^{-1}\det A_{4,1} = -(\det A)^{-1}\det\begin{pmatrix} 1&1&1\\ i&s&i\\ 0&1&1 \end{pmatrix} = -(\det A)^{-1}\det\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&s-i&0\\ 0&1&1 \end{pmatrix}$
$= \frac{i}{s+2i}$.

(3) (a) Wir rechnen z.B. $\det\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0\\ \iota&0&1&s&\iota\\ s&1&0&1&\iota\\ 0&1&\iota&1&0\\ 1&0&0&0&s \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0\\ \iota&0&1&s&\iota\\ s&0&0&0&\iota\\ 0&0&\iota&0&0\\ 1&0&0&0&s \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \iota&1&s&\iota\\ s&0&0&\iota\\ 0&\iota&0&0\\ 1&0&0&s \end{pmatrix} = -s\det\begin{pmatrix} s&0&\iota\\ 0&\iota&0\\ 1&0&s \end{pmatrix} = -s\iota\det\begin{pmatrix} s&\iota\\ 1&s \end{pmatrix}$
$= -\iota s(s^2-\iota)$.

(b) A ist singulär für $s\in\{0,\iota-1,-\iota+1\}$.

(c) Der Eintrag von A^{-1} bei $(1,5)$ ist $(-1)^{5+1}(\det A)^{-1}\det A_{5,1} = (\det A)^{-1}\det\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&s&\iota\\ 1&0&1&\iota\\ 1&\iota&1&0 \end{pmatrix} = (\det A)^{-1}\det\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&s&\iota\\ 0&0&0&\iota\\ 0&\iota&0&0 \end{pmatrix}$
$= (\det A)^{-1}\det\begin{pmatrix} 1&s&\iota\\ 0&0&\iota\\ \iota&0&0 \end{pmatrix} = \frac{-\iota}{s^2-\iota}$.

Aufgabe 45.

(1) Wir erhalten $\det\begin{pmatrix} 0&1&1&\cdots&1\\ 1&0&1&\cdots&1\\ &&\ddots&&\\ 1&\cdots&1&0&1\\ 1&\cdots&1&1&0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0&1&1&\cdots&1\\ 1&-1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&&\\ 1&0&\cdots&-1&0\\ 1&0&\cdots&0&-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} n-1&0&0&\cdots&0\\ 1&-1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&&\\ 1&0&\cdots&-1&0\\ 1&0&\cdots&0&-1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

(2) Es ist $a_n := \det\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0\cdots&0&0&1&1&1\\ 0\cdots&0&0&0&1&1 \end{pmatrix} \overset{\text{1. Zeile}}{=} \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0\cdots&0&0&1&1&1\\ 0\cdots&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} - \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0\cdots&0&0&1&1&1\\ 0\cdots&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$

$= \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0\cdots&0&0&1&1&1\\ 0\cdots&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} - \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&\cdots&0\\ 1&1&1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0\cdots&0&0&1&1&1\\ 0\cdots&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} = a_{n-1} - a_{n-2}\,.$

Ferner ist $a_1 = \det(1) = 1$ und $a_2 = \det\begin{pmatrix} 1&1\\ 1&1 \end{pmatrix} = 0$. Die Rekursionsformel liefert insbesondere $a_7 = 1 = a_1$ und $a_8 = 0 = a_2$, so daß wir das folgende periodische Verhalten ersehen können.

$$a_n = \begin{cases} -1 \text{ für } n\equiv_6 3,\ n\equiv_6 4\\ \ \ 0 \text{ für } n\equiv_6 2,\ n\equiv_6 5\\ \ \ 1 \text{ für } n\equiv_6 0,\ n\equiv_6 1\,. \end{cases}$$

(3) Im folgenden bezeichne a_n das Ergebnis aus Teilaufgabe (2). Wir stellen folgende Nebenrechnung vor, wobei $n\geq 3$.

$b_n := \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&1&0&0&\cdots&0&1\\ 1&1&1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0&0&\cdots&0&1&1&1\\ 1&0&\cdots&0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{n\times n} \overset{\text{1. Spalte}}{=} a_{n-1} - \det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&\cdots&0&1\\ 1&1&1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0&0&\cdots&0&1&1&1\\ 1&0&\cdots&0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^{n+1}\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&\cdots&0&1\\ 1&1&0&0&\cdots&0&0\\ 1&1&1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&1&1&0&\cdots&0\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ 0\cdots&0&1&1&1&0\\ 0&0&\cdots&0&1&1&1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$

$\overset{\text{jeweils 1. Zeile}}{=} a_{n-1} - (a_{n-2} + (-1)^{(n-1)+1}) + (-1)^{n+1}(1 + (-1)^{(n-1)+1}a_{n-2}) = a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2(-1)^{n+1}$.

Für $n \geq 5$ wird

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{3}\det\begin{pmatrix} n-2 & n-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3n-6 & 3n-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3n-6 & 3n-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3n-5 & 3n-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3n-5 & 3n-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3n-5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 3n-5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 3n-6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{2. Spalte}}{=} \tfrac{1}{9}\det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + \tfrac{1}{9}\det\underbrace{\begin{pmatrix} 3n-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\begin{aligned} &= -\tfrac{1}{9}(-1)^{n-2}b_{n-2} + \tfrac{1}{9}(6-3n)(-1)^{n-3}a_{n-3} \\ &= \tfrac{1}{9}(-(-1)^{n-2}(a_{n-3} - 2a_{n-4} + 2(-1)^{n-1}) + (6-3n)(-1)^{n-3}a_{n-3}) = \begin{cases} -\frac{n}{3} + 1 \text{ für } n \equiv_3 0 \\ \frac{n}{3} - \frac{1}{3} \text{ für } n \equiv_3 1 \\ 0 \text{ für } n \equiv_3 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Dies gilt nun auch für $n \in [1,4]$, wie man direkt überprüft, also insgesamt für $n \geq 1$.

Aufgabe 46. *Direkte Lösung.* Da A invertierbar ist, ist $x = A^{-1}b$. Mit der Cramerschen Regel wird mithin für $i \in [1,n]$

$$\xi_i \;=\; \sum_{j\in[1,n]} \Big((\det A)^{-1}(-1)^{i+j}\det A_{j,i}\Big)\vartheta_j \;=\; (\det A)^{-1}\sum_{j\in[1,n]}(-1)^{i+j}\vartheta_j \det A_{j,i}\;,$$

und letztere Summe ist die Laplaceentwicklung von $\det(a_{*,1},\cdots,a_{*,i-1},b,a_{*,i+1},\cdots,a_{*,n})$ nach der $i$ten Spalte.

Indirekte Kurzlösung. Ist $b = Ax = \sum_{j\in[1,n]} a_{*,j}\xi_j$, so ist $\det(a_{*,1},\cdots,a_{*,i-1},b,a_{*,i+1},\cdots,a_{*,n})$ $=\ \det(a_{*,1},\cdots,a_{*,i-1},\sum_{j\in[1,n]}\xi_j a_{*,j},a_{*,i+1},\cdots,a_{*,n}) \ = \ \xi_i \det A$, woraus das Resultat ebenfalls folgt.

Aufgabe 47. Nach Anwendung eines Isomorphismus $V \longrightarrow K^n$, $x_i \longmapsto e_i$ dürfen wir annehmen, daß $\underline{x} = \underline{e}$ und daß $\underline{y}$ das Spaltentupel einer regulären Matrix $A = (\eta_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ ist. Für ein gegebenes $k \in [1,n]$ müssen wir nun ein $j \in [1,n]$ so finden, daß $(e_1,\ldots,e_{j-1},y_k,e_{j+1}\ldots,e_n)$ und $(y_1,\ldots,y_{k-1},e_j,y_{k+1},\ldots,y_n)$ Spaltentupel regulärer Matrizen sind, i.e. derart, daß $0 \neq \det(e_1,\ldots,e_{j-1},y_k,e_{j+1}\ldots,e_n) = \eta_{j,k}$ und $0 \neq \det(y_1,\ldots,y_{k-1},e_j,y_{k+1},\ldots,y_n) = \pm\det A_{j,k}$ sind.

Mit Laplace nach der k-ten Spalte wird

$$0 \;\neq\; \det A \;=\; \sum_{j\in[1,n]}(-1)^{j+k}\eta_{j,k}\det A_{j,k}\;,$$

also gibt es in der Tat wenigstens ein $j \in [1,n]$, für welches weder $\eta_{j,k}$ noch $\det A_{j,k}$ verschwindet.

Aufgabe 48.

(1) Die Aussage ist falsch. Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ist $A - A^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ regulär.

(2) Die Aussage ist richtig. Es gilt $\det(A - A^{\mathrm{t}}) = \det((A-A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \det(A^{\mathrm{t}} - A) = \det(-(A-A^{\mathrm{t}})) = (-1)^n\det(A-A^{\mathrm{t}})$. Für n ungerade folgt also $\det(A-A^{\mathrm{t}}) = -\det(A-A^{\mathrm{t}})$, mithin $\det(A-A^{\mathrm{t}}) = 0$. Somit ist $A - A^{\mathrm{t}}$ singulär.