M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 13

Aufgabe 52.

(1) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$. Mit $S = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&1 \end{smallmatrix}\right)$ wird $S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} 1&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\mu_A(X) = (X-1)^2(X+1)$.

(2) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)(X-i)(X+i)$. Mit $S = \left(\begin{smallmatrix} 0&-1&-1\\ -1&-1-i&-1+i\\ 1&1&1 \end{smallmatrix}\right)$ z.B. wird $S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&i&0\\ 0&0&-i \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\mu_A(X) = (X-1)(X-i)(X+i)$.

(3) Es ist $\chi_A(X) = (X-1)^5$. Mit $S = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&-1\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ z.B. wird $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$. Es ist $\mu_A(X) = (X-1)^3$.

(4) Es ist $\chi_A(X) = X^2(X+1)^5$. Mit $S = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$ z.B. wird $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 53.

(1) Der Ansatz $\left(\begin{smallmatrix} a_{n-2}\\ a_{n-1}\\ a_n \end{smallmatrix}\right) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 2&3&0 \end{smallmatrix}\right)}_{=:A} \left(\begin{smallmatrix} a_{n-3}\\ a_{n-2}\\ a_{n-1} \end{smallmatrix}\right)$ führt mit $S := \left(\begin{smallmatrix} -1&-2&1\\ 1&1&2\\ -1&0&4 \end{smallmatrix}\right)$ und $J := S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix} -1&1&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&2 \end{smallmatrix}\right)$ auf

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a_{n-2}\\ a_{n-1}\\ a_n \end{smallmatrix}\right) &= A^{n-2}\left(\begin{smallmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \\ &= SJ^{n-2}S^{-1}\left(\begin{smallmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} -1&-2&1\\ 1&1&2\\ -1&0&4 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3}(n-2) & 0\\ 0 & (-1)^{n-2} & 0\\ 0 & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 4&8&-5\\ -6&-3&3\\ 1&2&1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} * \\ * \\ \frac{1}{9}((-1)^{n+1}(3n+2)+2^{n+1}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. auf $a_n = \frac{1}{9}((-1)^{n+1}(3n+2)+2^{n+1})$.

(2) Der Ansatz $\begin{pmatrix} a_{n-3}\\ a_{n-2}\\ a_{n-1}\\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&-2&0&2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_{n-4}\\ a_{n-3}\\ a_{n-2}\\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ führt mit $S := \begin{pmatrix} -1&1&-2&3\\ 1&1&-1&1\\ -1&1&0&0\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$ und $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ auf

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n-3}\\ a_{n-2}\\ a_{n-1}\\ a_n \end{pmatrix} &= A^{n-3}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= SJ^{n-3}S^{-1}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1&1&-2&3\\ 1&1&-1&1\\ -1&1&0&0\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & n-3 & (n-3)(n-4)/2\\ 0 & 0 & 1 & n-3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1&3&-3&1\\ -1&3&5&1\\ 2&-6&-2&6\\ 4&-4&-4&4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \frac{1}{8}((-1)^n+2n^2-8n+7) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. auf $a_n = \frac{1}{8}((-1)^n + 2n^2 - 8n + 7)$.

Aufgabe 54.

(1) Um den Exponenten von $X-\lambda$ in den Elementarteilern von $\left(\begin{smallmatrix} A&0\\ 0&B \end{smallmatrix}\right)$ auszurechnen, dürfen wir A und B als in Smithscher Normalform gegeben annehmen, da wir die dazu nötigen beidseitigen Multiplikationen blockweise ausführen können. In einem weiteren Schritt können wir durch Sortieren (also durch Konjugation mit einer Permutationsmatrix) für ein fest gewähltes λ erreichen, daß die Exponenten von $X-\lambda$ in den Hauptdiagonaleinträgen aufsteigend sortiert sind. (Über die Exponenten der anderen Linearfaktorpotenzen ist hierbei nichts gesagt, d.h. diese müssen nicht notwendig ebenfalls aufsteigend sortiert sein.)

Sei die Exponentenfolge von $X-\lambda$ in der Diagonalen von C gegeben durch $(\delta_1^C(\lambda),\ldots,\delta_{n+m}^C(\lambda))$. Der minimale Exponent von $X-\lambda$ in einem $k\times k$-Minor ungleich Null ist also $\delta_1^C(\lambda)+\cdots+\delta_k^C(\lambda)$ für $k\in[1,m+n]$. Dies ist also auch der Exponent von $X-\lambda$ im größten gemeinsamen Teiler der $k\times k$-Minoren. Damit ist $\delta_k^C(\lambda)$ der Exponent von $X-\lambda$ im Quotienten des ggT der $k\times k$-Minoren, geteilt durch den ggT der $(k-1)\times(k-1)$-Minoren, d.h. der Exponent von $X-\lambda$ im $k$ten Elementarteiler von C, wie behauptet.

(2) Der $(n-1)\times(n-1)$-Minor im rechten oberen Eck von

$$XE - A \;=\; \begin{pmatrix} X-\lambda & 1 & & & \\ & X-\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & X-\lambda & 1 \\ & & & & X-\lambda \end{pmatrix}$$

ist 1. Damit sind vom ersten bis zum $(n-1)$ten Elementarteiler diese alle gleich 1. Der verbliebene n-te Elementarteiler ist dann notwendigerweise gleich der ganzen Determinante der charakteristischen Matrix $XE-A$, d.h. gleich $(X-\lambda)^n$.

(3) Betrachten wir zunächst das charakteristische Polynom. Das Produkt der Elementarteiler einer Matrix in $K[X]$ ist bis auf einen Faktor in $K \smallsetminus \{0\}$ gleich ihrer Determinante. Da sowohl die Determinante $\chi_A(X)$ der charakteristischen Matrix als auch jeder Elementarteiler normierte Polynome sind, ist $\chi_A(X)$ nun in der Tat gleich dem Produkt der Elementarteiler von $XE-A$.

Betrachten wir nun das Minimalpolynom. Sei $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ so, daß $S^{-1}AS$ in Jordanform ist. Da sowohl $S \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ als auch $S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ liegen, stimmen die Elementarteiler von A und von $S^{-1}AS$ überein. Somit dürfen wir A als in Jordanform gegeben voraussetzen.

Sei $\chi_A(X) = \prod_{i\in[1,k]}(X-\lambda_i)^{m_i}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Sei $(b_{i,1},\dots,b_{i,s_i})$ das *auf*steigend sortierte Tupel der Kantenlängen der Jordanblöcke mit Diagonaleintrag λ_i in $S^{-1}AS$. Mit (1) und (2) ist

$$\delta_j^{XE-A}(\lambda_i) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } j \in [1, n-s_i] \\ b_{i,j-(n-s_i)} & \text{für } j \in [(n-s_i)+1, n] \end{cases}$$

Dies diene auch als Anleitung für (4).

Insbesondere ist $\delta_n^{XE-A}(\lambda_i) = b_{i,s_i}$ die maximale Kantenlänge eines Jordanblocks zum Eigenwert λ_i für alle $i \in [1,k]$. Damit ist der n-te Elementarteiler von A gerade gleich $\mu_A(X)$.

(4) Wie in (3) erläutert, können die Elementarteiler der charakteristischen Matrix der Jordanform entnommen werden.

(1) Die Elementarteiler von $XE-A$ sind 1, 1, $(X-1)^2(X+1)$.
(2) Die Elementarteiler von $XE-A$ sind 1, 1, $(X-1)(X-i)(X+i)$.
(3) Die Elementarteiler von $XE-A$ sind 1, 1, 1, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$.
(4) Die Elementarteiler von $XE-A$ sind 1, 1, 1, 1, $(X+1)$, $(X+1)^2$, $X^2(X+1)^2$.

Maple: smith$(XE-A, X)$.

Aufgabe 55.

Sei $\chi_A(X) = \prod_{j\in[1,k]}(X-\lambda_j)^{m_j}$ mit $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$.

(1) Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel sind $A = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ diagonalisierbar, nicht aber ihre Summe $A+B = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

(2) Die Aussage ist richtig. Ist $J := S^{-1}AS$ in Jordanform, mit $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist A^{-1} konjugiert zu $J^{-1} = S^{-1}A^{-1}S$, hat also dieselben geometrischen Vielfachheiten. Wegen der geometrischen Vielfachheiten hat J die Jordanblöcke $\lambda_j E_{m_j} + N_{m_j} \in \mathbf{C}^{m_j\times m_j}$, d.h. zu jedem Eigenwert existiert genau ein Jordanblock. Es ist zu zeigen, daß dies auch für J^{-1} gilt.

Durch blockweise Betrachtung von $S^{-1}A^{-1}S$ genügt es zu zeigen, daß in $(\lambda_j E_{m_j} + N_{m_j})^{-1}$ den Eigenwert λ_j^{-1} die geometrischen Vielfachheit 1 besitzt. Nun ist aber

$$(\lambda_j E_{m_j} + N_{m_j})^{-1} - \lambda_j^{-1}E_{m_j} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_j^{-2} & * & * & * \\ 0 & 0 & -\lambda_j^{-2} & * & * \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_j^{-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in der Tat von Rang $n-1$.

(3) Die Aussage ist richtig. Ist $J := S^{-1}AS$ in Jordanform, mit $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist A^{t} konjugiert zu $J^{\mathrm{t}} = S^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}(S^{\mathrm{t}})^{-1}$. Bleibt uns zu zeigen, daß J und J^{t} konjugiert sind. Blockweise Betrachtung reduziert uns darauf, zu zeigen, daß $\lambda_j E_k + N_k$ und $\lambda_j E_k + N_k^{\mathrm{t}}$ konjugiert sind, d.h. daß letztere als Jordanform die erstere Matrix besitzt. Nun hat aber letztere Matrix den einzigen Eigenwert λ_j, und dieser hat die geometrische Vielfachheit 1. Dies zeigt, daß auch sie genau einen Jordanblock besitzt, und diesen zum Eigenwert λ_j.

Die Angabe einer Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $T^{-1}AT = A^{\mathrm{t}}$ in Abhängigkeit von A ist vermutlich schwierig.