M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 14

Aufgabe 56.

(1) Wir haben $\bar{A}^{\mathrm{t}} A = A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} z\bar{z}+1 & z\bar{z}-1 \\ z\bar{z}-1 & z\bar{z}+1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Es ist A normal für $z \in \mathbf{C}$.

(b) Es ist A unitär, falls $\bar{A}^{\mathrm{t}} A = E$, d.h. falls $z\bar{z} = 1$, d.h. für $z \in \{\zeta \in \mathbf{C} \mid |\zeta| = 1\}$.

(c) Es ist A hermitesch für $z \in \mathbf{R}$.

(2) Wir haben $\bar{A}^{\mathrm{t}} A = A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8-4(z+\bar{z})+5z\bar{z} & -2-2(z+\bar{z})+4z\bar{z} & 2-4(z+\bar{z})+2z\bar{z} \\ -2-2(z+\bar{z})+4z\bar{z} & 5-(z+\bar{z})+5z\bar{z} & 4-2(z+\bar{z})-2z\bar{z} \\ 2-4(z+\bar{z})+2z\bar{z} & 4-2(z+\bar{z})-2z\bar{z} & 5-4(z+\bar{z})+8z\bar{z} \end{pmatrix}$.

(a) Es ist A normal für $z \in \mathbf{C}$.

(b) Ist A unitär, ist also $\bar{A}^{\mathrm{t}} A = E$, so ist $8 - 4(z+\bar{z}) + 5z\bar{z} = 9$ und $5 - (z+\bar{z}) + 5z\bar{z} = 9$, woraus $z + \bar{z} = 1$ folgt. Aus z.B. $5 - 4(z+\bar{z}) + 8z\bar{z} = 9$ folgt nun $z\bar{z} = 1$. Umgekehrt ist A unter diesen beiden Bedingungen an z auch unitär. Damit ist A unitär genau dann, wenn $z \in \{\zeta \in \mathbf{C} \mid \zeta + \bar{\zeta} = 1,\ \zeta\bar{\zeta} = 1\} = \{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3},\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\}$.

(c) Es ist A hermitesch für $z \in \mathbf{R}$.

(3) Wir haben $\bar{A}^{\mathrm{t}} A = \left(\begin{smallmatrix} 1+\bar{z}z & \bar{z}w & z+\bar{z} \\ \bar{w}z & 1+\bar{w}w & 1+\bar{w} \\ \bar{z}+z & 1+w & \bar{z}z+2 \end{smallmatrix}\right)$ und $A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \left(\begin{smallmatrix} 1+z\bar{z} & z & z+\bar{z} \\ \bar{z} & 2 & 1+\bar{w} \\ z+\bar{z} & w+1 & z\bar{z}+w\bar{w}+1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Es ist A normal, falls $\bar{A}^{\mathrm{t}} A = A\bar{A}^{\mathrm{t}}$, d.h. falls $w\bar{w} = 1$ und $\bar{w}z = \bar{z}$. Falls $z \neq 0$, ist mit $w = z/\bar{z}$ die erste Bedingung redundant. Also ist A normal genau dann, wenn

$$(z,w) \ \in \ (\{0\} \times \{\omega \in \mathbf{C} \mid |\omega| = 1\}) \cup (\{(\zeta,\omega) \mid \zeta \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\},\ \omega = \zeta/\bar{\zeta}\})\ .$$

(b) Es ist A unitär, falls $A\bar{A}^{\mathrm{t}} = E$. Dies ist wegen des Eintrags 2 an Position $(2,2)$ nie der Fall.

(c) Es ist A hermitesch, falls $(z,w) \in \mathbf{R} \times \{1\}$.

Aufgabe 57.

(1) Bezeichnen $y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so werden $x_1 := y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 := (y_2 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_2)x_1)^0 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_3 := (y_3 - (\bar{x}_1^t y_3)x_1 - (\bar{x}_2^t y_3)x_2)^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten also eine Orthonormalbasis

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

von U.

(2) Bezeichnen $y_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \leq \mathbf{C}^5$, so werden $x_1 := y_1^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 := (y_2 - (\bar{x}_1^{\mathrm{t}} y_2)x_1)^0 = \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 4-i \\ 3 \\ 4 \\ 4+i \\ -1 \end{pmatrix}$ und $x_3 := (y_3 - (\bar{x}_1^t y_3)x_1 - (\bar{x}_2^t y_3)x_2)^0 = \frac{1}{10\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -8-6i \\ 6-3i \\ -7+11i \\ 9-2i \\ -2-14i \end{pmatrix}$. Wir erhalten also eine Orthonormalbasis

$$\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 4-i \\ 3 \\ 4 \\ 4+i \\ -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{10\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -8-6i \\ 6-3i \\ -7+11i \\ 9-2i \\ -2-14i \end{pmatrix}\right)$$

von U.

Aufgabe 58.

Wir schreiben $\sigma = (s_{1,1}, \ldots, s_{1,l_1}) \cdots (s_{k,1}, \ldots, s_{k,l_k})$ in Zykelschreibweise, ohne die Zykel der Länge 1 zu unterschlagen. Dann ordnen wir die Standardbasis entsprechend um zur Basis

$$(e_{s_{1,1}}, \ldots, e_{s_{1,l_1}}, \ldots, e_{s_{k,1}}, \ldots, e_{s_{k,l_k}})$$

und beschreiben die lineare Abbildung $\mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$, $x \longmapsto \pi(\sigma)x$ in dieser Basis. Wir erhalten eine Hauptdiagonalblockmatrix mit Blöcken der Form $\pi((1,2,\dots,l_j))$. Da dieser Basiswechsel der Konjugation mit der Matrix, die in den Spalten die neugeordnete Basis stehen hat, entspricht, blieb hierbei das charakteristische Polynom ungeändert, und es wird also

$$\chi_{\pi(\sigma)}(X) \;=\; \prod_{j\in[1,k]} \chi_{\pi((1,2,\dots,l_j))}(X)\;.$$

Das charakteristische Polynom von $\pi((1,2,\dots,l_j))$ ist gleich dem charakteristischen Polynom von $\pi((1,2,\dots,l_j))^{\mathrm{t}}$ und wurde als solches in Aufgabe 49 (2) zu $X^{l_j}-1$ berechnet. Damit wird

$$\chi_{\pi(\sigma)}(X) \;=\; \prod_{j\in[1,k]} (X^{l_j}-1)\;.$$

Sei $\zeta_{l_j} := e^{2\pi i/l_j}$ eine *primitive l_j-te Einheitswurzel.* Dann ist $X^{l_j}-1 = \prod_{s\in[0,l_j-1]}(X-\zeta_{l_j}^s)$. Die Eigenwerte von $\pi(\sigma)$ ergeben sich also zu

$$(\zeta_{l_j}^s \mid j\in[1,k]\,,\; s\in[0,l_j-1])\;,$$

wobei ggf. mit Vielfachheit auftretende Eigenwerte noch separat angeführt sind.

Aufgabe 59 (4 Punkte).

(1) Die Aussage ist falsch. Z.B. ist für $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ hermitesch und $B = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ unitär das Produkt $AB = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ nicht normal, da es sich um eine nichtdiagonale obere Dreiecksmatrix handelt.

(2) Die Aussage ist richtig.

Erster Beweis. Es ist $A^2 = A\bar{A}^{\mathrm{t}} = E$.

Zweiter Beweis, später verständlich. Ist A unitär und hermitesch, so hat A Eigenwerte in $\{-1,+1\}$. Also hat A^2 nur den Eigenwert 1. Da A^2 als unitäre Matrix diagonalisierbar ist, ist notwendig $A^2 = E$.

(3) Die Aussage ist richtig. Denn wegen $f(A) = 0$ für $f(X) = X^2-X-2 = (X+1)(X-2)$ hat auch das Minimalpolynom als Teiler von $f(X)$ nur Nullstellen mit Vielfachheit 1. Daher sind die maximalen Jordanblockkantenlängen der Jordanform von A gleich 1, woraus die Diagonalisierbarkeit von A folgt.

(4) Die Aussage ist falsch. Z.B. sind $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ nilpotent, nicht aber $AB = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$.

(5) Die Aussage ist richtig. Ist S invertierbar mit $S^{-1}AS$ diagonal, und ist T invertierbar mit $T^{-1}BT$ diagonal, so ist auch insgesamt $\left(\begin{smallmatrix}S&0\\0&T\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}S&0\\0&T\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}S^{-1}AS&0\\0&T^{-1}BT\end{pmatrix}$ diagonal.

Umgekehrt, ist $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ diagonalisierbar, und ist λ ein Eigenwert von $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$, so haben wir zu zeigen, daß algebraische und geometrische Vielfachheit von λ bezüglich $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ übereinstimmen. Da $\chi_{\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)}(X) = \chi_A(X)\chi_B(X)$, addieren sich die algebraischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von A und als Eigenwert von B (Vielfachheit Null jeweils zugelassen; heißt, daß kein Eigenwert) zur Vielfachheit von λ als Eigenwert von $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$. Können wir dasselbe zeigen für die geometrischen Vielfachheiten, so sind wir wegen der Diagonalisierbarkeit von $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ und der Ungleichung zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit fertig. Nun ist diese geometrische Vielfachheit aber gleich der Dimension des Kerns von $\begin{pmatrix}A-\lambda E&0\\0&B-\lambda E\end{pmatrix}$. Ein Vektor in diesem Kern setzt sich aus zwei aufeinandergestellten Vektoren zusammen, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, wobei $x\in\mathrm{Kern}(A-\lambda E)$ und $y\in\mathrm{Kern}(B-\lambda E)$. Ist also $(x_1,\dots x_k)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A-\lambda E)$, und $(y_1,\dots y_l)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B-\lambda E)$, so ist $(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\0\end{smallmatrix}\right),\dots,\left(\begin{smallmatrix}x_k\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\y_1\end{smallmatrix}\right),\dots,\left(\begin{smallmatrix}0\\y_l\end{smallmatrix}\right))$ eine Basis von $\mathrm{Kern}\begin{pmatrix}A-\lambda E&0\\0&B-\lambda E\end{pmatrix}$. Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit von λ als Eigenwert von $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ in der Tat die Summe der geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von A und von B (Vielfachheit Null jeweils zugelassen; heißt, daß kein Eigenwert).

Diese Argumente gelten auch für Matrizen A, B unterschiedlicher Kantenlänge.

(6) Die Aussage ist richtig. Sei $S\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ mit $S^{-1}AS$ diagonal, und zwar so, daß gleiche Eigenwerte in der Diagonale beieinanderstehen. Dann ist für einen Eigenwert λ von A der Eigenraum von A, also $E_A(\lambda)$, stabil unter Multiplikation mit B; denn ist $Ax = \lambda x$, so ist $A(Bx) = BAx = \lambda(Bx)$. Damit ist $S^{-1}BS = \mathrm{diag}(B_1,\dots,B_k)$ eine Hauptdiagonalblockmatrix mit Blöcken, die jeweils zu einem Eigenwert von A korrespondieren. Mit dem Argument zu (5) sind alle Matrizen B_j diagonalisierbar. Führt man die Diagonalisierung blockweise durch, so entsteht eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(T_1,\dots,T_k)^{-1}S^{-1}BS\,\mathrm{diag}(T_1,\dots,T_k)$. Nun ist aber $\mathrm{diag}(T_1,\dots,T_k)^{-1}S^{-1}AS\,\mathrm{diag}(T_1,\dots,T_k) = S^{-1}AS$ ebenfalls diagonal, und wir haben eine simultane Diagonalisierung von A und B erreicht.

Vgl. auch Skript, Zusatzabschnitt 4.3.5, Bemerkung am Ende.

(7) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Die Bedingung $AB = BA$ führt uns auf eine Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&a\end{smallmatrix}\right)$ mit a, $b\in\mathbf{C}$. Nun ist die Bedingung, daß $S\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ die Matrix A in Jordanform überführen sollte, äquivalent zu $SA = AS$, d.h. S muß auch von der Form $S = \left(\begin{smallmatrix}u&v\\0&u\end{smallmatrix}\right)$ mit u, $v\in\mathbf{C}$ sein, wobei hier noch $u\neq 0$ sein sollte. Daraus folgt aber $S^{-1}BS = B$, da $BS = \left(\begin{smallmatrix}ua&ub+va\\0&ua\end{smallmatrix}\right) = SB$. Eine Matrix S, die A in Jordanform bringt, kann also B nicht in Jordanform bringen, sofern nur $b\notin\{0,1\}$.

Somit haben wir z.B. das Gegenbeispiel $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, für welches keine Matrix S gefunden werden kann, die simultan A und B in Jordanform bringt.