M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 15

Aufgabe 60.

(1) Es ist A hermitesch, insbesondere unitär diagonalisierbar. Mit z.B.
$U = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5i & 0 & -5i \\ 3i & -4i\sqrt{2} & 3i \\ 4 & 3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_3(\mathbf{C})$ wird $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
Es ist A indefinit, wie aus dem Eigenwertkriterium hervorgeht.

(2) Es ist A normal, wie ein Vergleich $\bar{A}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{diag}(4,4,4,4) = A\bar{A}^{\mathrm{t}}$ zeigt. Es ist A aber nicht hermitesch. (Hingegen ist $\frac{1}{2}A$ unitär.) Mit z.B. $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_4(\mathbf{C})$ wird
$\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$.

(3) Wegen $\bar{A}^{\mathrm{t}}A - A\bar{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 4i & 0 \\ -4i & 0 & -4i \\ 0 & 4i & 0 \end{pmatrix}$ ist A nicht normal, also auch nicht unitär diagonalisierbar. Wenden wir also Schurs Lemma dafür an, durch unitäre Konjugation aus A eine obere Dreieckmatrix zu machen. Zunächst ist $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor von A (zum Eigenwert 0), welchen wir mit Gram-Schmidt in eine unitäre Matrix z.B. der Form $V := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_3(\mathbf{C})$ als erste Spalte einstellen. Es ergibt sich

$$\bar{V}^{\mathrm{t}}AV = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fahren wir mit dem rechten unteren 2×2-Block $A' := \begin{pmatrix} 2i & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ fort. Dieser hat den normierten Eigenvektor $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert $1+i$), welchen wir mit Gram-Schmidt z.B. die unitäre Matrix $W := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-i \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_2(\mathbf{C})$ als erste Spalte einstellen. Es ergibt sich

$$\bar{W}^{\mathrm{t}}A'W = \begin{pmatrix} i+1 & -(i+1)\sqrt{2} \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}.$$

Mit $U := V \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 1-i \\ 0 & (1+i)\sqrt{2} & -2 \\ 2 & \sqrt{2} & 1-i \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_3(\mathbf{C})$ wird also insgesamt

$$\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & -(i+1)\sqrt{2} \\ 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix — aber keine Diagonalmatrix, was wegen A nicht normal auch nicht sein darf.

Es wäre eine interessante Aufgabe, zu untersuchen, welche oberen Dreiecksmatrizen zueinander unitär konjugiert sind; d.h. mit dem Schurschen Lemma eine Normalform von Matrizen unter unitärer Konjugation zu finden, analog der Jordanschen Normalform unter Konjugation.

(4) Es ist A hermitesch, insbesondere unitär diagonalisierbar. Mit z.B.
$U = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} & -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_6(\mathbf{C})$ ist $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Mit dem Eigenwertkriterium ist A also indefinit.

Aufgabe 61.

(1) Mit dem Eigenwertkriterium oder direkt mit der Definition über die quadratische Form, für die hier stets $q_A(x) = 0$ ist, sieht man, daß A sowohl positiv semidefinit als auch negativ semidefinit ist. Sie ist aber weder positiv noch negativ definit.

(2) Die Hauptminoren sind $\det A_1 = \det(1) = +1 > 0$, $\det A_2 = \det\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right) = +1 > 0$ und $\det A_3 = \det\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&4\end{smallmatrix}\right) = +3 > 0$. Mit dem Hauptminorenkriterium ist A also positiv definit. (Das Eigenwertkriterium ist hier praktisch nicht anwendbar.))

(3) Die Hauptminoren sind $\det A_1 = \det(-1) = -1 < 0$, $\det A_2 = \det\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right) = +1 > 0$, $\det A_3 = \det\left(\begin{smallmatrix}-1&0&i\\0&-2&2\\-i&2&-4\end{smallmatrix}\right) = -2 < 0$ und $\det A_4 = \det\left(\begin{smallmatrix}-1&0&i&-i\\0&-2&2&1\\-i&2&-4&0\\i&1&0&-2\end{smallmatrix}\right) = +1 > 0$. Mit dem Hauptminorenkriterium ist A also negativ definit.
(Das Eigenwertkriterium ist hier praktisch nicht anwendbar.)

Aufgabe 62.

(1) Die Aussage ist richtig. Ist A unitär, so gibt es eine unitäre Matrix U mit $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ diagonal, mit Diagonaleinträgen von Betrag 1. Ist A dazuhin nilpotent, so auch die unitär konjugierte Matrix $\bar{U}^{\mathrm{t}}(A-E)U = \bar{U}^{\mathrm{t}}AU-E$. Diese ist allerdings diagonal, und kann daher nur nilpotent sein, wenn sie Null ist. Aus $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU = E$ folgt schließlich $A = UE\bar{U}^{\mathrm{t}} = E$.

(2) Die Aussage ist richtig. Ist $A = -\bar{A}^{\mathrm{t}}$ (man sagt, *schiefhermitesch*), so ist A wegen $\bar{A}^{\mathrm{t}}A = -A^2 = A\bar{A}^{\mathrm{t}}$ auch normal. Sei U unitär mit $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ diagonal. Dann ist wegen $-(\overline{\bar{U}^{\mathrm{t}}AU})^{\mathrm{t}} = -\bar{U}^{\mathrm{t}}\bar{A}^{\mathrm{t}}U = \bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ auch $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ schiefhermitesch, und das bedeutet für eine Diagonalmatrix, daß ihre Einträge in $i\mathbf{R}$ liegen (man sagt, *rein imaginär* sind).

(3) Die Aussage ist falsch. Z.B. erkennt man mit dem Hauptminorkriterium, daß $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$ nicht positiv definit ist, und also wegen Regularität auch nicht positiv semidefinit sein kann.

(4) Die Aussage ist richtig. Denn ist $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, so ist $A - A^{\mathrm{t}}$ schiefhermitesch. Ihr charakteristisches Polynom ist reell, und hat mit (2) nur rein imaginäre Nullstellen. Nun ist für ein Polynom in $\mathbf{R}[X]$ mit einer komplexen Zahl auch ihre Konjugierte eine Nullstelle. Daher können die Nullstellen ungleich 0 von $\chi_A(X)$ zu Paaren zueinander konjugierter Nullstellen in $i\mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ geordnet werden. Die Anzahl der Nullstellen von $\chi_A(X)$ ungleich Null, gezählt mit algebraischer Vielfachheit, ist also durch 2 teilbar. Diese Anzahl gibt aber zugleich den Rang von A.

(5) Die Aussage ist richtig. Ist A hermitesch und negativ definit, so ist zunächst A^2 wegen $\overline{(A^2)}^{\mathrm{t}} = (\bar{A}^{\mathrm{t}})^2 = A^2$ ebenfalls hermitesch. Ferner gibt es eine unitäre Matrix U mit $\bar{U}^{\mathrm{t}}AU$ diagonal, mit Diagonaleinträgen in $\mathbf{R}_{<0}$. Damit ist $(\bar{U}^{\mathrm{t}}AU)^2 = \bar{U}^{\mathrm{t}}A^2U$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen in $\mathbf{R}_{>0}$, so daß mit Eigenwertkriterium A^2 positiv definit ist.

(6) Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel ist für $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ das Produkt $\left(\begin{smallmatrix}\xi_1&\xi_2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{smallmatrix}\right) = 0$ für alle Vektoren $x = \left(\begin{smallmatrix}\xi_2\\\xi_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^2$.

(7) Die Aussage ist richtig. Sei also $\bar{x}^{\mathrm{t}}Ax = 0$ für alle $x \in \mathbf{C}$, und schreibe $A = (a_{i,j})_{i,j}$. Dann ist insbesondere $\bar{e}_j^{\mathrm{t}}Ae_j = a_{j,j} = 0$ für $j \in [1,n]$. Dann sehen wir, daß $(\overline{e_j + e_k})^{\mathrm{t}}A(e_j + e_k) = a_{k,j} + a_{j,k} = 0$ und $(\overline{e_j + ie_k})^{\mathrm{t}}A(e_j + ie_k) = -ia_{k,j} + ia_{j,k} = 0$, zusammen also in der Tat $a_{j,k} = 0$ für $j,\ k \in [1,n]$ mit $j \neq k$.