M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 5

Aufgabe 20.

(1) Das Tupel ist linear abhängig, da z.B. $1 \cdot \binom{3}{-1} + 3 \cdot \binom{-1}{1} + (-2) \cdot \binom{0}{1} = \binom{0}{0} = 0$.

(2) Das Tupel ist linear unabhängig über $\mathbf{R}$.

(3) Das Tupel ist linear abhängig, da z.B. $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

(4) Das Tupel $(\beta^3, \beta^4, \beta^5) = (1+\beta, \beta+\beta^2, 1+\beta+\beta^2)$ ist linear unabhängig über $\mathbf{F}_2$.

(5) Das Tupel ist linear abhängig, da z.B. $\beta \cdot \beta^3 + 1 \cdot \beta^4 + 0 \cdot \beta^5 = 0$.

Aufgabe 21.

(1) Hier gilt $y \notin \langle \underline{x} \rangle$.

(2) Hier gilt $y \notin \langle \underline{x} \rangle$.

(3) Hier gilt $y \in \langle \underline{x} \rangle$, da $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \iota \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \iota \\ 0 \end{pmatrix} + \iota \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\iota \\ 1 \\ \iota \end{pmatrix}$.

(4) Hier gilt $y \in \langle \underline{x} \rangle$, da $1 \cdot (X+1)^2 + 1 \cdot (X+1)^3 + 0 \cdot (X+1)^4 = X^3 + X$.

Aufgabe 22.

(1) Sei $\overline{g(X)} = \overline{f(X)}$. Dann existiert ein $h(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ mit $g(X) = f(X) + (X^p - X)h(X)$. Wegen $x^p - x = 0$ für alle $x \in \mathbf{F}_p$ ist $(x \longmapsto g(x)) = (x \longmapsto f(x) + (x^p - x)h(x)) = (x \longmapsto f(x))$, und damit ist φ wohldefiniert.

(2) Es genügt Injektivität nachzuweisen, da sowohl $\#\mathbf{F}_p[X]/(X^p - X)\mathbf{F}_p[X] = p^p$ als auch $\#M_p = p^p$ (vgl. Aufgabe 2 (2)). Für $f(X), g(X) \in K[X]$ mit $\varphi(\overline{f(X)}) = \varphi(\overline{g(X)})$ haben wir nachzuweisen, daß $\overline{f(X)} = \overline{g(X)}$. Polynomdivision gibt $f(X) - g(X) = (X^p - X)h(X) + r(X)$ mit einem $h(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ und mit einem $r(X) \in \mathbf{F}_p[X]$, für welches $\deg(r) < p$ oder $r = 0$. Wegen $f(x) = g(x) = x^p - x = 0$ für alle $x \in \mathbf{F}_p$ ist auch $r(x) = 0$ stets. Wäre $r \neq 0$, so könne man vom Polynom $r(X)$ von Grad $< p$ alle p Nullstellen als Linearfaktoren abspalten, was nicht gehen kann. Also ist $r = 0$, und folglich $f(X) - g(X) = (X^p - X)h(X) \in (X^p - X)\mathbf{F}_p[X]$, d.h. $\overline{f(X)} = \overline{g(X)}$.

(3) Betrachte das Polynom

$$f_y(X) \;=\; \frac{\prod_{x \in \mathbf{F}_p \smallsetminus \{y\}} (X - x)}{\prod_{x \in \mathbf{F}_p \smallsetminus \{y\}} (y - x)}\ ,$$

beachte hierbei, daß der Nenner in der Tat nicht verschwindet. Es ist $\deg f_y \leq p - 1$ und es ist $f_y(y) = 1$ sowie $f_y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{F}_p \smallsetminus \{y\}$, wie gewünscht.

Sei $\psi \in M_p$. Dann ist zu zeigen, dass ein $\overline{f(X)} \in \mathbf{F}_p[X]/(X^p - X)\mathbf{F}_p[X]$ existiert, für das $\varphi(\overline{f(X)}) = \psi$ gilt, d.h. für das $f(x) = \psi(x)$ für alle $x \in \mathbf{F}_p$ ist. Diesen Anforderungen genügt das Polynom

$$f(X) \;=\; \sum_{y \in \mathbf{F}_p} \psi(y) f_y(X)\ ,$$

da $f(x) = \sum_{y \in \mathbf{F}_p} \psi(y) f_y(x) = \psi(x) f_x(x) = \psi(x)$ für alle $x \in \mathbf{F}_p$.

Aufgabe 23.

(1) Die Aussage ist richtig. Existiert $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ mit $\lambda \cdot x + \mu \cdot y = 0$, so ist auch $\lambda \cdot x + \mu \cdot y + 0 \cdot z = 0$ für $(\lambda, \mu, 0) \neq (0,0,0)$.

(2) Die Aussage ist richtig. Sei $\lambda \cdot x + \mu \cdot y + \nu \cdot z = 0$ mit $\lambda,\ \mu,\ \nu \in K$. Dann folgt wegen $z \notin \langle x, y \rangle$, dass $\nu = 0$ sein muss, da sonst $z = -\nu^{-1}\lambda x - \nu^{-1}\mu y \in \langle x, y \rangle$. Wegen $y \notin \langle x \rangle$ folgt nun $\mu = 0$, da sonst $y = -\mu^{-1}\lambda x \in \langle x \rangle$. Schließlich ist auch noch $\lambda = 0$, da $x \neq 0$ ist. Damit ist zwingend $(\lambda, \mu, \nu) = (0,0,0)$, und also ist das Tupel (x, y, z) linear unabhängig.

(3) Die Aussage ist richtig. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, $x \in \langle y, z \rangle$. Dann existieren μ, ν mit $x = \mu \cdot y + \nu \cdot z$. Folglich gilt $(-1) \cdot x + \mu \cdot y + \nu \cdot z = 0$, aber $(-1, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$, und das Tupel (x, y, z) ist als linear abhängig nachgewiesen. Dies ist ein Widerspruch, da das Tupel (x, y, z) als linear unabhängig vorausgesetzt war.

(4) Die Aussage ist falsch. Wir betrachten z.B. folgendes Gegenbeispiel. Sei $K = \mathbf{F}_2$, sei $V = \mathbf{F}_2^3$, sei $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $z = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist dann

$$1 \cdot (x + y) + 1 \cdot (x + z) + 1 \cdot (y + z) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 0\,.$$

(5) Die Aussage ist richtig. Zunächst stellt man fest, dass in diesem Fall $0 \neq 2$ in K gilt, denn sonst wäre $1 \cdot (x + y) + 1 \cdot (x + z) + 1 \cdot (y + z) = 2x + 2y + 2z = 0$ und das Tupel $(x + y, x + z, y + z)$ somit linear abhängig.

Es gilt $2x = (x+y)+(x+z)-(y+z)$, $2y = (x+y)-(x+z)+(y+z)$ und $2z = -(x+y)+(x+y)+(y+z)$.

Man betrachtet die Linearkombination $\lambda \cdot x + \mu \cdot y + \nu \cdot z = 0$ mit $\lambda, \mu, \nu \in K$. Es ist zu zeigen, dass daraus $\lambda = \mu = \nu = 0$ folgt. Einsetzen von $2x$, $2y$ und $2z$ in $\lambda \cdot 2x + \mu \cdot 2y + \nu \cdot 2z = 0$ liefert

$$(\lambda + \mu - \nu) \cdot (x + y) + (\lambda - \mu + \nu) \cdot (x + z) + (-\lambda + \mu + \nu)(y + z) \;=\; 0\,.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit des Tupels $(x + y, x + z, y + z)$ folgt daraus $\lambda + \mu - \nu = 0$, $\lambda - \mu + \nu = 0$ und $-\lambda + \mu + \nu = 0$. Löst man nun dieses Gleichungssystem, so erhält man zunächst $2\lambda = 0$, $2\mu = 0$ und $2\nu = 0$, und wegen $2 \neq 0$ in K also $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$.

Alternative Methode ohne jede Rechnung, aber später erst verständlich: Es ist $\langle x+y, x+z, y+z \rangle$ ein Untervektorraum von $\langle x, y, z \rangle$, und wegen der linearen Unabhängigkeit des Tupels $(x+y, x+z, y+z)$ ist $\dim\langle x + y, x + z, y + z \rangle = 3$. Also muss $\langle x, y, z \rangle$ mindestens die Dimension 3 haben. Wählt man eine Basis von $\langle x, y, z \rangle$ aus dem erzeugenden Tupel (x, y, z) aus, so hat diese Länge ≥ 3, also Länge $= 3$, und das Tupel (x, y, z) ist als linear unabhängig nachgewiesen.