M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 6

Aufgabe 24.

(1) Eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ ist z.B. gegeben durch das Tupel $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}\right)$. Dieses kann beispielsweise durch den Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis von V ergänzt werden. Es gilt $\dim\langle \underline{x} \rangle = 2$.

(2) Eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ ist z.B. gegeben durch das Tupel $\left(\begin{pmatrix}i\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Dieses kann beispielsweise durch den Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis von V ergänzt werden. Es gilt $\dim\langle \underline{x} \rangle = 3$.
Achtung: Das Tupel $\underline{x}$ darf nicht durch Streichung eines beliebigen Vektors verkürzt werden. Insbesondere darf der Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ nicht gestrichen werden.

(3) Eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ ist z.B. gegeben durch das Tupel $((X-1)^4, (X-1)^3)$. Dieses kann beispielsweise durch das Tupel $(1, X, X^2)$ zu einer Basis von V ergänzt werden. Es gilt $\dim\langle \underline{x} \rangle = 2$.

(4) Eine Basis von $\langle \underline{x} \rangle$ ist z.B. gegeben durch das Tupel $\left(\begin{pmatrix}1\\\beta\\\beta+1\end{pmatrix}\right)$. Dieses kann beispielsweise durch das Tupel $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ zu einer Basis von V ergänzt werden. Es gilt $\dim\langle \underline{x} \rangle = 1$.

Aufgabe 25.

(1) Eine Basis von $T \cap U$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Als Basis von $T + U$ kann $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ gewählt werden. Die Summe ist wegen $T \cap U \neq 0$ nicht direkt.

(2) Wegen $T \cap U = 0$ ist das leere Tupel $()$ eine Basis von $T \cap U$. Eine Basis von $T + U$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Die Summe $T + U$ ist wegen $T \cap U = 0$ direkt, d.h. $T + U = T \oplus U$.

(3) Als Basis für $T \cap U$ kann das Tupel $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\\alpha\\0\\1+\alpha\end{pmatrix}\right)$ gewählt werden. Eine Basis von $T + U$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\\0\\\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$. Wegen $T \cap U \neq 0$ ist die Summe nicht direkt.

Aufgabe 26.

(1) In $\mathbf{F}_3^2 \smallsetminus \{0\}$ gibt es 8 Vektoren. Also gibt es auch 8 linear unabhängige Tupel der Länge 1.
Für jeden Untervektorraum der Dimension 1 gibt es 2 verschiedene Basen, da $\#(\mathbf{F}_3 \smallsetminus \{0\}) = 2$.
Weil also je zwei verschiedene Basen der Länge 1 denselben Untervektorraum erzeugen, gibt es $8/2 = 4$ Untervektorräume der Dimension 1 in $\mathbf{F}_3^2$, als wir da hätten $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\rangle$, $\langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

(2) Wir suchen linear unabhängige Tupel der Länge 2 in $\mathbf{F}_5^3$. Für den ersten Vektor haben wir $125 - 1 = 124$ Möglichkeiten, da dieser Vektor beliebig ist, bis auf die Tatsache, daß er nicht gleich 0 sein sollte. Für den zweiten Vektor haben wir $125 - 5 = 120$ Möglichkeiten, da dieser Vektor beliebig ist, bis auf die Tatsache, daß er nicht im Erzeugnis des ersten Vektors liegen sollte. Also gibt es $124 \cdot 120 = 14880$ linear unabhängige Tupel der Länge 2.

In einem Untervektorraum der Dimension 2 wollen wir nun die Basen zählen. Für den ersten Basisvektor gibt es $25 - 1 = 24$ Möglichkeiten, da dieser beliebig ist, bis auf den Nullvektor. Für den zweiten Basisvektor gibt es nun noch $25 - 5 = 20$ Möglichkeiten, da dieser beliebig ist, bis auf die Tatsache, daß er nicht im Erzeugnis des ersten Vektors liegen sollte. Insgesamt gibt es $24 \cdot 20 = 480$ Basen in einem Untervektorraum der Dimension.

Da je 480 Basen denselben Untervektorraum erzeugen, gibt es $14880/480 = 31$ Untervektorräume der Dimension 2 in V.

(3) In $\mathbf{F}_p^n$ gibt es

$$\prod_{k\in[0,d-1]} (p^n - p^k)$$

linear unabhängige Tupel der Länge d. In der Tat gibt es für den ersten Vektor, der ja ungleich 0 sein sollte, $p^n - 1$ Wahlmöglichkeiten; für den zweiten, der nicht im eindimensionalen Erzeugnis des ersten liegen sollte, noch $p^n - p$ Möglichkeiten; für den dritten, der nicht im zweidimensionalen Erzeugnis der ersten beiden liegen sollte, noch $p^n - p^2$ Möglichkeiten; usf.

In einem Untervektorraum der Dimension d von $\mathbf{F}_p^n$ gibt es

$$\prod_{k\in[0,d-1]} (p^d - p^k)$$

Basen. In der Tat gibt es für den ersten Vektor, der ungleich 0 sein sollte, $p^d - 1$ Wahlmöglichkeiten; für den zweiten, der nicht im eindimensionalen Erzeugnis des ersten liegen sollte, noch $p^d - p$ Möglichkeiten; für den dritten, der nicht im zweidimensionalen Erzeugnis der ersten beiden liegen sollte, noch $p^d - p^2$ Möglichkeiten; usf.

Da nun je $\prod_{k\in[0,d-1]}(p^d - p^k)$ linear unabhängige Tupel denselben Untervektorraum erzeugen, gibt es

$$\frac{\prod_{k\in[0,d-1]}(p^n - p^k)}{\prod_{k\in[0,d-1]}(p^d - p^k)}$$

Untervektorräume der Dimension d in V.

Bemerkung (fakultativ). Manchmal schreibt man in Analogie zum Binomialkoeffizienten $\binom{n}{d}$, der die Anzahl der d-elementigen Teilmenge einer n-elementigen Menge angibt, auch $\left[{n \atop d}\right] := \frac{\prod_{k\in[0,d-1]}(p^n-p^k)}{\prod_{k\in[0,d-1]}(p^d-p^k)}$. Die resultierenden polynomialen (!) Funktionen in p heißen auch kurz *Gaußpolynome*.

Aufgabe 27.

(1) Die Aussage ist richtig.

$\Longrightarrow$: Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Basis von V, so sind alle $x_i \neq 0$. Ferner, jeder Vektor $y \in V$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form $y = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n$ mit $\lambda_i \in K$. Also ist zunächst $V = \langle x_1 \rangle + \cdots + \langle x_n \rangle$. Und gegeben zwei Darstellungen $y = \sum_{j\in[1,n]} u_j = \sum_{j\in[1,n]} u'_j$ mit $u_j \in \langle x_j \rangle$, können wir $u_j = \lambda_j x_j$ und $u'_j = \lambda'_j x_j$ mit $\lambda_j,\ \lambda'_j \in K$ schreiben. Damit ist $y = \sum_{j\in[1,n]} \lambda_j x_j = \sum_{j\in[1,n]} \lambda'_j x_j$, und es folgt, daß $\lambda_j = \lambda'_j$ stets, und damit auch $u_j = u'_j$ stets. Also $V = \langle x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_n \rangle$.

$\Longleftarrow$: Ist $V = \langle x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_n \rangle$, so hat jeder Vektor $y \in V$ eine eindeutige Darstellung $y = \sum_{j\in[1,n]} u_j$ mit $u_j \in \langle x_j \rangle$. Damit hat y eine Darstellung der Form $y = \sum_{j\in[1,n]} \lambda_j x_j$, mit $\lambda_j \in K$. Bleibt zu zeigen, daß diese eindeutig ist. Sind zwei Darstellungen dieser Form gegeben, $y = \sum_{j\in[1,n]} \lambda_j x_j = \sum_{j\in[1,n]} \lambda'_j x_j$, dann folgt mit der Direktheit der Summe aus $\lambda_j x_j,\ \lambda'_j x_j \in \langle x_j \rangle$, daß $\lambda_j x_j = \lambda'_j x_j$ stets. Da nun zusätzlich $x_j \neq 0$, folgt daraus $\lambda_j = \lambda'_j$ stets.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei $V = \mathbf{R}^2$ über $\mathbf{R}$, und seien $U_1 := \langle \binom{1}{0} \rangle$, $U_2 := \langle \binom{0}{1} \rangle$ und $U_3 := \langle \binom{1}{1} \rangle$. Dann ist $U_1 \cap U_2 = 0$ und $U_1 \cap U_3 = 0$, aber es ist $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_1 \neq 0$.

(3) Die Aussage ist falsch. Betrachte das Gegenbeispiel aus (2). Es gilt $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = 0$, aber es ist

$$\binom{1}{1} \;=\; 0 \cdot \binom{1}{0} + 0 \cdot \binom{0}{1} + 1 \cdot \binom{1}{1} \;=\; 1 \cdot \binom{1}{0} + 1 \cdot \binom{0}{1} + 0 \cdot \binom{1}{1},$$

so dass die Summe nicht direkt ist.

(4) Die Aussage ist falsch. Betrachte erneut das Gegenbeispiel aus (2). Es gilt $U_1 \cap U_2 = 0$, $U_1 \cap U_3 = 0$ und $U_2 \cap U_3 = 0$, aber die Summe ist nicht direkt (vgl. (3)).

(5) Die Aussage ist richtig. Es ist zu zeigen, dass jeder Vektor $u \in U_1 + U_2 + U_3$ eine eindeutige Darstellung $u = u_1 + u_2 + u_3$ mit $u_j \in U_j$ besitzt. Seien zwei solche Darstellungen gegeben, $u = u_1 + u_2 + u_3 = u'_1 + u'_2 + u'_3$, wobei $u_j,\ u'_j \in U_j$. Dann ist

$$u_3 - u'_3 \;=\; (u'_1 + u'_2) - (u_1 + u_2) \;\in\; U_3 \cap (U_1 + U_2) \;=\; 0\,,$$

also $u_3 = u'_3$ und auch $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$. Nun folgt mit

$$u_1 - u'_1 \;=\; u'_2 - u_2 \;\in\; U_1 \cap U_2 \;=\; 0$$

schließlich, daß $u_1 = u'_1$ und $u_2 = u'_2$.