M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Lösung 7

Aufgabe 28.

(1) Eine Basis von Kern f ist z.B. gegeben durch $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ferner ist z.B. das Tupel $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$. Die Abbildung f ist nicht injektiv, da Kern $f \neq 0$. Sie ist nicht surjektiv, da $\dim \operatorname{Im} f = 2$, aber $\dim W = 3$ gilt.

(2) Eine Basis von Kern f ist beispielsweise $(\begin{pmatrix} \iota \\ -1 \\ -\iota \\ 1 \end{pmatrix})$, und damit ist die Abbildung nicht injektiv. Ferner ist z.B. das Tupel $(\begin{pmatrix} \iota \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \iota \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \iota \end{pmatrix})$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$. Die Abbildung ist surjektiv, da $\operatorname{Im} f \leq W$ und $\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim W$, und mithin $\operatorname{Im} f = W$.

(3) Eine Basis von Kern f ist z.B. (1), und damit ist f nicht injektiv. Da z.B. (ι) eine Basis von $\operatorname{Im} f$ ist, folgt $\dim \operatorname{Im} f = 1 < 2 = \dim W$, und also ist f nicht surjektiv.

Aufgabe 29.

(1) Die Abbildung φ ist linear, wie folgende Rechnung zeigt. Seien $f(X)$, $g(X) \in \mathbf{R}[X]$ und seien $\lambda, \mu \in K$. Es wird

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f(X) + \mu g(X)) &= (X \cdot (\lambda f(X) + \mu g(X)))' \\ &= (\lambda X f(X) + \mu X g(X))' \\ &= \lambda (X f(X))' + \mu (X g(X))' \,. \\ &= \lambda \varphi(f(X)) + \mu \varphi(g(X)) \,. \end{aligned}$$

Die Abbildung ist injektiv. In der Tat ist mit $f(X) = \sum_{j \geq 0} a_j X^j$ das Bild $\varphi(f(X)) = \sum_{j \geq 0} (j+1) a_j X^j$ genau dann gleich 0, wenn alle $a_j = 0$ sind, was Kern $f = 0$ zeigt.

Die Abbildung ist auch surjektiv, da $\varphi(\sum_{j \geq 0} \frac{a_j}{j+1} X^j) = \sum_{j \geq 0} a_j X^j$ gilt.

(2) Wie in (1) ist φ linear. Die Abbildung φ ist nicht surjektiv, da z.B. $X^4 \notin \operatorname{Im} \varphi$. Außerdem ist φ nicht injektiv, weil z.B. $X^4 \in \operatorname{Kern} \varphi$.

(3) Die Abbildung $\varphi : \sum_{j \geq 0} a_j X^j \longmapsto \sum_{j \geq 0} a_j X^{3j}$ ist linear und injektiv. Dagegen ist φ nicht surjektiv, da z.B. $X \notin \operatorname{Im} \varphi$.

(4) Hier ist φ nicht linear, da z.B. $\varphi(X+1) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \neq X^3 + 1 = \varphi(X) + \varphi(1)$.

Für die Injektivität betrachten wir das Urbild von $\varphi^{-1}(\{1\})$. Es gibt nun außer dem konstanten Polynom 1 darin noch weitere konstante Polynome. Denn Polynomdivision liefert $s^3 - 1 = (s-1)(s^2 + s + 1)$, so daß $\zeta_3 := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ und $\zeta_3^2 = \bar{\zeta}_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ebenfalls in diesem Urbild liegen.

Da $X \notin \operatorname{Im} \varphi$, ist φ auch nicht surjektiv.

(5) Seien $f(X), g(X) \in \mathbf{F}_3[X]$ und $\lambda, \mu \in \mathbf{F}_3$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f(X) + \mu g(X)) &= \lambda^3 f(X)^3 + 3\lambda^2 f(X)^2 \mu g(X) + 3\lambda f(X) \mu^2 g(X)^2 + \mu^3 g(X)^3 \\ &= \lambda^3 f(X)^3 + \mu^3 g(X)^3 \\ &= \lambda f(X)^3 + \mu g(X)^3 = \lambda \varphi(f(X)) + \mu \varphi(g(X)) \,. \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung φ linear.

Es gilt $\varphi(\sum_{j \geq 0} a_j X^j) = \sum_{j \geq 0} a_j^3 X^{3j} = \sum_{j \geq 0} a_j X^{3j} = 0$ genau dann, wenn $a_j = 0$ für alle $j \geq 0$. Folglich ist φ injektiv. Wegen $X \notin \operatorname{Im} \varphi$ ist φ nicht surjektiv.

(6) Wegen $\varphi(X+1) = ((X+1)+1)+1 = X+3 \neq \varphi(X) + \varphi(1) = X+1$ ist φ nicht linear.

Die Abbildung ist auch nicht injektiv, da z.B. $\varphi(\zeta_3 X) = X = \varphi(X)$, aber $\zeta_3 X \neq X$. Es ist stets $\deg \varphi(f) = \deg(f)^3$, folglich ist beispielsweise $X^2 \notin \operatorname{Im} \varphi$, und demnach ist φ nicht surjektiv.

Aufgabe 30.

(1) Sei $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis von $\mathbf{F}_3^3$. Eine Abbildung $\varphi : \mathbf{F}_3^3 \longrightarrow \mathbf{F}_3^4$ ist injektiv genau dann, wenn das Tupel $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3))$ linear unabhängig ist. Also genügt es, alle linear unabhängigen Tupel der Länge 3 in $\mathbf{F}_3^4$ zu zählen.

Der Vektorraum $\mathbf{F}_3^4$ hat 3^4 Elemente, also gibt es $3^4 - 3^0$ Möglichkeiten für $\varphi(x_1) \neq 0$. Für $\varphi(x_2) \notin \langle\varphi(x_1)\rangle$ bleiben genau $3^4 - 3^1$ Möglichkeiten. Ferner muss $\varphi(x_3) \notin \langle\varphi(x_1), \varphi(x_2)\rangle$ liegen. Also kann $\varphi(x_3)$ aus $3^4 - 3^2$ Vektoren gewählt werden. Insgesamt gibt es $(3^4 - 3^0)(3^4 - 3^1)(3^4 - 3^2)$ $(= 449280)$ injektive $\mathbf{F}_3$-lineare Abbildungen von $\mathbf{F}_3^3$ nach $\mathbf{F}_3^4$.

(2) Sei durch das Tupel (x_1, x_2, x_3, x_4) eine Basis von $\mathbf{F}_3^4$ gegeben. Eine Abbildung $\varphi : \mathbf{F}_3^4 \longrightarrow \mathbf{F}_3^3$ ist surjektiv genau dann, wenn $\langle\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)\rangle = \mathbf{F}_3^3$. Also muss man die erzeugenden Tupel (y_1, y_2, y_3, y_4) der Länge 4 in $\mathbf{F}_3^3$ zählen, d.h. diejenigen, die ein linear unabhängiges Tupel der Länge 3 enthalten. Wir unterscheiden folgende Fälle.

Fall 1: Es ist (y_1, y_2, y_3) linear unabhängig. Diesenfalls ist y_4 beliebig ergänzbar. Wir haben hierfür also $(3^3 - 3^0)(3^3 - 3^1)(3^3 - 3^2) \cdot 3^3$ Möglichkeiten.

Fall 2: Es ist (y_1, y_2, y_3) linear abhängig, aber (y_1, y_2) linear unabhängig. Diesenfalls muß (y_1, y_2, y_4) linear unabhängig sein. Da $y_3 \in \langle y_1, y_2\rangle$ zu liegen hat, gibt es für ihn 3^2 Möglichkeiten. Insgesamt haben wir $(3^3 - 3^0)(3^3 - 3^1) \cdot 3^2 \cdot (3^3 - 3^2)$ Möglichkeiten.

Fall 3: Es ist (y_1, y_2) linear abhängig, aber (y_1) linear unabhängig, d.h. $y_1 \neq 0$. Diesenfalls muß (y_1, y_3, y_4) linear unabhängig sein. Da $y_2 \in \langle y_1\rangle$ zu liegen hat, gibt es für ihn 3^1 Möglichkeiten. Insgesamt haben wir $(3^3 - 3^0) \cdot 3^1 \cdot (3^3 - 3^1)(3^3 - 3^2)$ Möglichkeiten.

Fall 4: Es ist (y_1) linear abhängig, d.h. $y_1 = 0$. Nun muß (y_2, y_3, y_4) linear unabhängig sein. Hierfür gibt es $3^0 \cdot (3^3 - 3^0)(3^3 - 3^1)(3^3 - 3^2)$ Möglichkeiten.

Alles in allem gibt es $(3^3 - 3^0)(3^3 - 3^1)(3^3 - 3^2) \cdot (3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0)$ $(= 449280)$ surjektive $\mathbf{F}_3$-lineare Abbildungen von $\mathbf{F}_3^4$ nach $\mathbf{F}_3^3$.

Frage (fakultativ): Ist es Zufall, daß das Resultat in (1) mit dem in (2) übereinstimmt?

Aufgabe 31.

(1) Die Aussage ist richtig. Sei $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ mit $\lambda_i \in K$. Wir haben zu zeigen, daß $\lambda_i = 0$ stets. Wegen $0 = f(0) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$ folgt nun aus der linearen Unabhängigkeit des Tupels $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ in der Tat, daß stets $\lambda_i = 0$.

(2) Die Aussage ist richtig. In der Tat ist

$$\dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Kern} g \;=\; (\dim U - \dim V) + (\dim V - \dim W) \;=\; \dim U - \dim W \;=\; \dim \operatorname{Kern}(g \circ f)\,.$$

Bemerkung: Es hätte genügt, f als surjektiv vorauszusetzen, da dann wegen $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$ das angeführte Argument gültig bleibt.

(3) Die Aussage ist falsch. Betrachte als Gegenbeispiel $U = 0$, $V = K$, $W = 0$ mit $f : U \longrightarrow V$, $0 \longmapsto 0$ und $g : V \longrightarrow W$, $\xi \longmapsto 0$. Dann ist $\operatorname{Kern} f = 0$, $\operatorname{Kern} g = K$ und $\operatorname{Kern}(g \circ f) = 0$. Es ist aber $\dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Kern} g = 0 + 1 \neq 0 = \dim \operatorname{Kern}(g \circ f)$.

(4) Die Aussage ist richtig. Zunächst zeigen wir, dass ein $n \geq 1$ exisitert mit $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}$. Es gilt $\operatorname{Im} f^{n+1} \leq \operatorname{Im} f^n$, also auch $\dim \operatorname{Im} f^{n+1} \leq \dim \operatorname{Im} f^n$. Wäre nun $\operatorname{Im} f^{n+1} \neq \operatorname{Im} f^n$ für alle $n \geq 1$, so wäre $\dim \operatorname{Im} f^{n+1} < \dim \operatorname{Im} f^n$ für alle $n \geq 1$. Wegen $\dim V < \infty$ wäre dann aber $\dim \operatorname{Im} f^m < 0$ für ein m genügend groß. Widerspruch!

Es existiert also ein n mit $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}$. Es bleibt zu zeigen, dass für dieses n gilt, daß $\operatorname{Kern} f^n = \operatorname{Kern} f^{n+1}$. Zunächst hat man $\operatorname{Kern} f^n \leq \operatorname{Kern} f^{n+1}$, weil aus $f^n(x) = 0$ folgt, dass $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$. Also genügt es zu zeigen, dass $\dim \operatorname{Kern} f^n = \dim \operatorname{Kern} f^{n+1}$. Und in der Tat ist

$$\dim \operatorname{Kern} f^n \;=\; \dim V - \dim \operatorname{Im} f^n \;=\; \dim V - \dim \operatorname{Im} f^{n+1} \;=\; \dim \operatorname{Kern} f^{n+1}\,.$$