M. Künzer, J. Marhenke

Lösung Zusatz 2

(1) Mit

$$U \;=\; \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2 & \sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{2} \\ -2\sqrt{5} & -1 & 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & -4 & -\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -2\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{U}_5(\mathbf{C})$$

wird $\bar{U}^{\mathrm{t}} A U = \mathrm{diag}(0,0,0,10,-5) =: D$.

(2) Mit $\tilde{D} := \mathrm{diag}(0,0,0,\sqrt{10}, i\sqrt{5})$ wird wie im Hinweis

$$B \;=\; U\tilde{D}\bar{U}^{\mathrm{t}} \;=\; \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} + \frac{i}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & -3 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbf{C}^{5\times 5}\,,$$

und in der Tat ist $B^2 = A$.

Da B zu einer Diagonalmatrix unitär konjugiert ist, ist B normal.

(3) Nein, 1 kann nicht der einzige Eigenwert von V sein. Denn wäre dem so, so wäre V, da diagonalisierbar, bereits gleich E, und also U bereits diagonal. Das hätte aber wegen $A = UD\bar{U}^{\mathrm{t}}$ auch A diagonal zur Folge, was nicht der Fall ist.