SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

Scheinklausur zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker
Freitag, 15.7.2005

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y, z) \;=\; e^x \cos y - \arctan(\sin x) + \log(1 + z^2) \, .$$

   (i) Berechnen Sie den Gradienten von f.

   (ii) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen im Punkt $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})^{\mathrm{t}}$.

(je 5 P.)

2. Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := 4x^2 - 3xy$ und $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1$.

   (i) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

   (ii) Stellen Sie die Lagrangegleichungen zum Finden von stationären Punkten von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ auf.

   (iii) Begründen Sie, warum f auf der Menge $\{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$ Maximum und Minimum besitzt, und finden Sie diese.

(3+3+4 P.)

3. Es sei $B := \{(x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_2 \ge 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_B \frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)\,\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \,\mathrm{d}(x_1, x_2) \, .$$

(10 P.)

4. Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) \;:=\; \sin \frac{t}{2} \quad \text{für} \quad -\pi \le t < \pi \, .$$

   (i) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

   (ii) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie ihren Wert an der Stelle π.

(je 5 P.)

5. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß für alle $x, y \in [0, 2]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x \cos \alpha - y \cos \beta| \;\le\; |x - y| + 2|\alpha - \beta| \, .$$

(10 P.)

6. Es sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} (1+y)\log x + y \\ x \log x + y^2 \end{pmatrix}.$$

   (i) Ist das Vektorfeld f konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.

   (ii) Die Kurve γ sei definiert durch die Parameterdarstellung

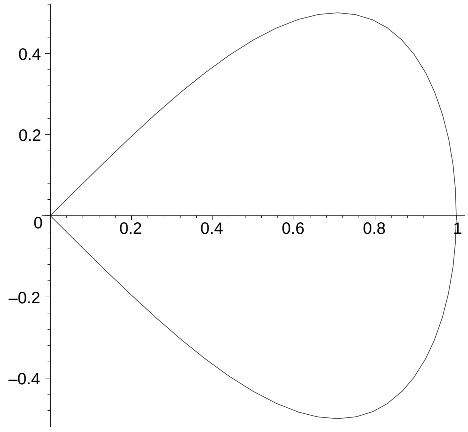
$$\gamma : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ t^4 \end{pmatrix},\; t \in [0,1]\,.$$

   Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs γ.

(6+4 P.)

7. Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ werde berandet von der Kurve

$$\gamma : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \sin t \\ -(\sin t)(\cos t) \end{pmatrix},\; t \in [0,\pi]\,.$$



Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene den Inhalt von M. (10 P.)

8. Gegeben sei das Vektorfeld $f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)^{\mathrm{t}}$ und bezeichne F die obere Hälfte der Einheitssphäre. Berechnen Sie

$$\int_F \nu^{\mathrm{t}} \operatorname{rot} f \,\mathrm{d}\sigma$$

   (i) direkt

   (ii) und mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(je 5 P.)

9. Man werfe zwei ideale Würfel. Es sei X das Maximum der beiden Augenzahlen. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. (10 P.)

10. Ein Spieler wirft 2 Würfel und gewinnt 1 Euro, falls er mindestens eine 5 oder eine 6 würfelt. Ansonsten verliert er 1 Euro.

   (i) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Gewinns bei diesem Spiel.

   (ii) Das Spiel wird 900 Mal wiederholt. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die ungefähre Wahrscheinlichkeit, daß er höchstens 80 Euro gewinnt.

(je 5 P.)