SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

1. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 22.04.2005, vor den Übungen

Schreibweise: Es bezeichne $M^\circ := \overset{\circ}{M}$ den offenen Kern einer Menge M.

1. Geben Sie jeweils M°, $\overline{M}$, ∂M und M' an (ohne Beweis).

   (i) $M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $a_i < b_i$ für $i = 1, 2, 3$.

   (ii) $M = \{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ |y| > 1\}$.

   (iii) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (iv) $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \times (0, n) \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (v) $M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \middle|\ m, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

(1+1+1+2+2 P.)

Lösung:

(i)

$$\begin{aligned} M^\circ &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \\ \overline{M} = M' &= M \\ \partial M &= (\{a_1, b_1\} \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]) \\ &\quad \cup([a_1, b_1] \times \{a_2, b_2\} \times [a_3, b_3]) \\ &\quad \cup([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{a_3, b_3\}) \ . \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} M^\circ &= M \\ \overline{M} = M' &= \{(x, y)^{\mathrm{t}} |\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ oder } |y| \geq 1\} \\ \partial M &= \{(x, y)^{\mathrm{t}} |\ x^2 + y^2 \in \{0, 1\} \text{ oder } |y| = 1\} \ . \end{aligned}$$

(iii) $M^\circ = \emptyset$, $\overline{M} = M' = \partial M = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

(iv)

$$\begin{aligned} M^\circ &= M \\ \overline{M} = M' &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}\right] \times [0, n] \right) \cup (\{0\} \times [0, \infty)) \\ \partial M &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}\right] \times \{n\} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\tfrac{1}{n}\right\} \times [n-1, n] \right) \\ &\quad \cup (\{0\} \times [0, \infty)) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \ . \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} M^\circ &= \emptyset \\ \overline{M} = \partial M &= \{0\} \cup \left\{ \tfrac{1}{n} \middle|\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup M \\ M' &= \{0\} \cup \left\{ \tfrac{1}{n} \middle|\ n \in \mathbb{N} \right\} . \end{aligned}$$

2. Es seien X ein normierter Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie, daß M' abgeschlossen ist.

(2 P.)

Lösung: Es sei $x_0 \in M''$. Zu zeigen ist $x_0 \in M'$. Es sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists x \in M :\ 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon$. Nun ist $x_0 \in M''$. Also gibt es ein $y \in M'$ mit $0 < \|y - x_0\| < \varepsilon/2$. Es sei $\delta := \|y - x_0\|$. Nun ist $y \in M'$. Also gibt es ein $x \in M$ mit $0 < \|x - y\| < \delta$. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 &< \delta - \|x-y\| = \|y - x_0\| - \|x - y\| \leq \|x - x_0\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y - x_0\| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

3. Entscheiden Sie, ob folgende Relationen in einem normierten Raum gelten. Geben Sie jeweils einen Beweis für die Aussage oder ein Gegenbeispiel an.

   (i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   (ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (iii) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.
   (iv) $\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B)$.
   (v) $A^\circ = \overline{A^\circ}^\circ$.
   (vi) $A''' = A''$.

(je 2 P.)

Lösung:

   (i) Zunächst ist $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, und $\overline{A} \cup \overline{B}$ ist abgeschlossen. Daraus folgt definitionsgemäß $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Andererseits gilt $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Daraus folgt $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Insgesamt folgt daher $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   (ii) Gegenbeispiel: $A := (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, $B := (1,2) \subseteq \mathbb{R}$. Dann folgt $\overline{A \cap B} = \emptyset$, aber $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.
   (iii) Gegenbeispiel: $A := (0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $B := [1,2) \subseteq \mathbb{R}$. Dann folgt $(A \cup B)^\circ = (0,2)$, aber $A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2)$.

(iv) Es gilt mit (i)

$$\begin{aligned}
\partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ \\
&= (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)^\circ \\
&= \big(\overline{A} \setminus (A \cup B)^\circ\big) \cup \big(\overline{B} \setminus (A \cup B)^\circ\big) \\
&\subseteq \big(\overline{A} \setminus A^\circ\big) \cup \big(\overline{B} \setminus B^\circ\big) \\
&= (\partial A) \cup (\partial B) \; .
\end{aligned}$$

(v) Gegenbeispiel: $A := (0,1) \cup (1,2) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $A^\circ = A$, aber $\overline{A^\circ}^{\,\circ} = (0,2)$.

(vi) Gegenbeispiel: $A := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \middle| \; m,n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A' &= \{0\} \cup \left\{ \tfrac{1}{n} \middle| \; n \in \mathbb{N} \right\} \\
A'' &= \{0\} \\
A''' &= \emptyset \; .
\end{aligned}$$

4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit $x_0 := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Zeigen Sie, daß die Menge $M := \{x_n | \; n \geq 0\}$ kompakt ist.

(3 P.)

Lösung: Es sei $\{O_\alpha | \; \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von M. Dann ist $x_0 \in O_{\alpha_0}$ für ein gewisses $\alpha_0 \in I$. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq O_{\alpha_0}$. Wegen $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon \; .$$

Daher ist

$$\{x_n | \; n \geq N\} \subseteq O_{\alpha_0} \; .$$

Ferner gibt es zu jedem $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ ein $\alpha_n \in I$ so, daß $x_n \in O_{\alpha_n}$. Es folgt

$$M \subseteq O_{\alpha_0} \cup O_{\alpha_1} \cup \ldots \cup O_{\alpha_{N-1}},$$

d.h. wir haben eine endliche Teilüberdeckung von M gefunden. Aus der Beliebigkeit von $\{O_\alpha | \; \alpha \in I\}$ folgt, daß M kompakt ist.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05