SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

10. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 24.6.2005, vor den Übungen

1. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare skalare Funktion, und $g, h : G \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie.

   (i) $\operatorname{div}(g \times h) = \langle h, \operatorname{rot}\, g\rangle - \langle g, \operatorname{rot}\, \mathrm{h}\rangle$.

   (ii) Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt $\operatorname{rot}((\operatorname{grad}\, f)^{\mathrm{t}}) = 0$.

   (iii) Ist g zeimal stetig differenzierbar, so gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\, g) = 0$.

   Lösung: Es sei stets $g = (g_1, g_2, g_3)^{\mathrm{t}}$ und $h = (h_1, h_2, h_3)^{\mathrm{t}}$.

   (i) Es wird

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(g \times h) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} g_2h_3 - g_3h_2 \\ g_3h_1 - g_1h_3 \\ g_1h_2 - g_2h_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial(g_2h_3 - g_3h_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(g_3h_1 - g_1h_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(g_1h_2 - g_2h_1)}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\, h_3 + g_2\, \frac{\partial h_3}{\partial x_1} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}\, h_2 - g_3\, \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{\partial g_3}{\partial x_2}\, h_1 + g_3\, \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\, h_3 - g_1\, \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\
&\quad + \frac{\partial g_1}{\partial x_3}\, h_2 + g_1\, \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\, h_1 - g_2\, \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\
&= h_1 \cdot \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right) + h_2 \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right) + h_3 \cdot \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) \\
&\quad - g_1 \cdot \left(\frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_3}\right) - g_2 \cdot \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1}\right) - g_3 \cdot \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \langle h, \operatorname{rot}\, g\rangle - \langle g, \operatorname{rot}\, \mathrm{h}\rangle\ .
\end{aligned}
$$

   (ii) Es wird nach dem Satz von Schwarz

$$
\operatorname{rot}((\operatorname{grad}\, f)^{\mathrm{t}}) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_3x_2} - f_{x_2x_3} \\ f_{x_1x_3} - f_{x_3x_1} \\ f_{x_2x_1} - f_{x_1x_2} \end{pmatrix} = 0\ .
$$

(iii) Es wird nach dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\, g) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1 x_2} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_2 x_1} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 x_3} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_3 x_2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_3 x_1} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1 x_3} \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie Divergenz und Rotation der Kugelkoordinatentransformation

$$g(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r(\cos\varphi)(\cos\theta) \\ r(\sin\varphi)(\cos\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix}\ .$$

Lösung: Es wird

$$g' = \begin{pmatrix} (\cos\varphi)(\cos\theta) & -r(\sin\varphi)(\cos\theta) & -r(\cos\varphi)(\sin\theta) \\ (\sin\varphi)(\cos\theta) & r(\cos\varphi)(\cos\theta) & -r(\sin\varphi)(\sin\theta) \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}\ .$$

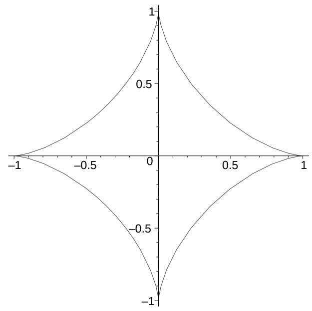
Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\, g &= \operatorname{Spur}\, g' = (\cos\varphi)(\cos\theta) + r(\cos\varphi)(\cos\theta) + r\cos\theta \\
&= (r + \cos\varphi + r\cos\varphi)\cos\theta\ .
\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{rot}\, g = \begin{pmatrix} r(\sin\varphi)(\sin\theta) \\ -r(\cos\varphi)(\sin\theta) - \sin\theta \\ (\sin\varphi)(\cos\theta) + r(\sin\varphi)(\cos\theta) \end{pmatrix}\ .$$

3. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der *Astroide*, die durch die Randkurve $\gamma : \binom{x(t)}{y(t)} = \binom{(\cos t)^3}{(\sin t)^3}$, $t \in [0, 2\pi]$ begrenzt wird. Skizze:



Lösung: Nach dem Gaußschen Integralsatz in der Ebene, angewandt mit den Funktionen $f(x,y) = x/2$ und $g(x,y) = -y/2$, ergibt sich der Inhalt der Astroide B durch

$$\begin{aligned}
|B| &= \frac{1}{2}\int_\gamma (x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos t)^3 \cdot 3(\sin t)^2 \cos t + (\sin t)^3 \cdot 3(\cos t)^2 \sin t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin t)^2 (\cos t)^2 ((\cos t)^2 + (\sin t)^2) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin t)^2 (\cos t)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\cos t)^2 - (\cos t)^4 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\,(\sin t)(\cos t) + \frac{t}{2} \; - \frac{1}{4}\,(\sin t)(\cos t)^3 - \frac{3}{8}\,(\sin t)(\cos t) - \frac{3t}{8}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{2}\left(\pi - \frac{3 \cdot 2\pi}{8}\right) \\
&= \frac{3\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

4. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der obere Halbkreis um den Ursprung mit Radius 1. Ferner sei γ die positiv orientierte Randkurve von B. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (x^3 \cos y + y^4 \exp(y^2)) \,\mathrm{d}y + (3x^2 \sin y - 2y + \log(x^4+1)) \,\mathrm{d}x\,.$$

Lösung: Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defniert durch

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^3 \cos y + y^4 \exp(y^2) \\
g(x,y) &= 3x^2 \sin y - 2y + \log(x^4+1)\,.
\end{aligned}$$

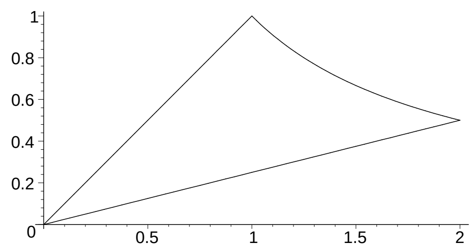
Nach dem Gaußschen Satz in der Ebene folgt

$$\begin{aligned}
& \int_\gamma (x^3 \cos y + y^4 \exp(y^2))\ \mathrm{d}y + (3x^2 \sin y - 2y + \log(x^4+1))\ \mathrm{d}x \\
= & \int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}y + g(x,y)\mathrm{d}x \\
= & \int_B (f_x(x,y) - g_y(x,y))\ \mathrm{d}(x,y) \\
= & \int_B (3x^2 \cos y - (3x^2 \cos y - 2))\ \mathrm{d}(x,y) \\
= & \int_B 2\ \mathrm{d}(x,y) \\
= & \ 2 \cdot |B| \\
= & \ \pi\ .
\end{aligned}$$

5. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Bereich im 1. Quadranten, der von den Geraden $y = x$, $y = 1/x$ und $y = x/4$ begrenzt wird. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene den Inhalt sowie den Schwerpunkt von B.

   (Hinweis: Ist γ die positive orientierte Randkurve von B, so gilt $|B| = \frac{1}{2}\int_\gamma x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x$ und $\int_B x\ \mathrm{d}(x,y) = -\int_\gamma xy\ \mathrm{d}x$.)

   Lösung: Skizze:



Die Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seien definiert durch

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t/4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,2] \\
\gamma_2 &: \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad t \in [1,2] \\
\gamma_3 &: \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]\ .
\end{aligned}$$

Dann wird B berandet durch die positive orientierte Kurve $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$. Mit dem Gaußschen Integralsatz in der Ebene wird

$$\begin{aligned}
|B| &= \frac{1}{2}\int_\gamma x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\gamma_3} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(t \cdot \frac{1}{4} - \frac{t}{4}\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(t \cdot \frac{-1}{t^2} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 (t - t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{t} \, \mathrm{d}t \\
&= \log 2 \, .
\end{aligned}$$

Setzt man $f(x,y) = 0$ und $g(x,y) = -xy$, so besagt der Gaußsche Integralsatz

$$\int_B x \, \mathrm{d}(x,y) = \int_B f_x(x,y) - g_y(x,y) \, \mathrm{d}(x,y) = \int_\gamma f(x,y) \, \mathrm{d}y + g(x,y) \, \mathrm{d}x = -\int_\gamma xy \, \mathrm{d}x \, .$$

Analog erhält man mit $f(x,y) = xy$ und $g(x,y) = 0$

$$\int_B y \, \mathrm{d}(x,y) = \int_\gamma xy \, \mathrm{d}y \, .$$

Der Schwerpunkt (x_S, y_S) von B hat die Koordinaten

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{|B|}\int_B x \, \mathrm{d}(x,y) \\
&= -\frac{1}{\log 2}\int_\gamma xy \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(-\int_0^2 \frac{t^2}{4} \, \mathrm{d}t + \int_1^2 1 \, \mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(-\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3\log 2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{|B|}\int_B y \, \mathrm{d}(x,y) \\
&= \frac{1}{\log 2}\int_\gamma xy \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(\int_0^2 \frac{t^2}{16}\, \mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{-1}{t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3\log 2}\,.
\end{aligned}$$

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05