SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

12. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 8.7.2005, vor den Übungen

1. Wir wollen n numerierte Bälle auf k numerierte Körbe verteilen. Es seien $n_1, \ldots, n_k \geq 0$ gegeben mit $n_1 + \ldots + n_k = n$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bälle so zu verteilen, daß genau n_i Bälle im i-ten Korb landen

(3 P.)

Lösung: Wir geben zwei mögliche Lösungen an.

(i) Zunächst müssen n_1 aus n Bällen ausgewählt werden, dann n_2 aus $n - n_1$, dann n_3 aus $n - n_1 - n_2$ usw. Also ist die Anzahl der Möglichkeiten insgesamt gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} \\
= \; & \frac{n!\;(n-n_1)!\;(n-n_1-n_2)!\;\cdot \ldots \cdot (n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_1!\;(n-n_1)!\;n_2!\;(n-n_1-n_2)!\;n_3!\;(n-n_1-n_2-n_3)!\;\cdot \ldots \cdot n_k!\;0!} \\
= \; & \frac{n!}{n_1!\;n_2!\;\cdot \ldots \cdot n_k!} \;.
\end{aligned}$$

(ii) Zuerst zählen wir alle Permutationen der n Bälle, das sind $n!$ Stück. Dadurch ist die Verteilung auf die n Körbe entschieden, wenn man einfach der Reihenfolge nach die Körbe auffüllt. Dann müssen aber alle Permutationen der Bälle innherhalb der Körbe wieder vernachlässigt werden, d.h. man muß die Zahlen $n_1!, \ldots, n_k!$ wieder herausdividieren. Auf diese Art gewinnt man als Lösung die Zahl

$$\frac{n!}{n_1!\;n_2!\;\cdot \ldots \cdot n_k!} \;.$$

2. In einer Stadt werden Tuberkulose-Untersuchungen durch Röntgenverfahren durchgeführt. Nehmen wir an, daß durch dieses Verfahren 90% aller Kranken als infiziert erkannt werden, daß aber andererseits 1% der Gesunden fälschlicherweise als infiziert registriert wird. Von der gesamten Bevölkerung seien 0.1% infiziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein als infiziert registrierter Bürger wirklich krank ist?

(3 P.)

Lösung: Es sei A das Ereignis „infiziert“ und B das Ereignis „als krank registriert“. Aus der Aufgabenstellung wissen wir also, daß

$$p(A) = 0.001 \;, \;\; p(B|A) = 0.9 \;, \;\; p(B|A^c) = 0.01 \;.$$

Nach dem Satz von Bayes ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\begin{aligned} p(A|B) &= \frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A) + p(A^c)p(B|A^c)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.9}{0.001 \cdot 0.9 + 0.999 \cdot 0.01} \\ &= \frac{10}{121} \approx 8.264\% \,. \end{aligned}$$

3. Bei einem Zufallsexperiment werfe man drei ideale Würfel. Die Ereignisse A, B, C seien wie folgt definiert.

   - A: Mindestens einer der Würfel zeigt eine 6.
   - B: Die Würfel zeigen drei verschiedene Augenzahlen.
   - C: Die Würfel zeigen lauter identische Augenzahlen.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ und $p(A \cap B)$. Sind die Ereignisse A und B unabhängig?

   (4 P.)

   Lösung: Offenbar gilt

$$p(A^c) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^3} \,,$$

   also ist

$$p(A) = 1 - p(A^c) = \frac{91}{216} \,.$$

   Um drei verschiedene Augenzahlen zu bekommen, gibt es für den ersten Würfel 6 Möglichkeiten, für den zweiten 5 Möglichkeiten und für den dritten 4 Möglichkeiten. Es folgt

$$p(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9} \,.$$

   Um drei identische Augenzahlen zu bekommen, gibt es genau 6 verschiedene Möglichkeiten, nämlich je eine für jede mögliche Augenzahl. D.h. es gilt

$$p(C) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \,.$$

   Um die Möglichkeiten für Ereignis $A \cap B$ zu zählen, gibt es zunächst 3 Möglichkeiten, um die 6 zu würfeln. Für die beiden anderen Würfel hat man dann noch $5 \cdot 4$ mögliche Augenzahlen. Es wird also

$$p(A \cap B) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{18} \,.$$

   Insbesondere ist

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot p(B) > p(A)p(B) \,,$$

   und daher sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig.

4. Eine Urne enthalte r rote und s schwarze Kugeln, wobei $r, s \geq 0$. Bei einem Zufallsexperiment ziehe man n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei $n \leq r + s$. Es sei X die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Zeigen Sie, daß für $0 \leq k \leq r$ gilt

$$p(X = k) \;=\; \frac{\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r+s \\ n \end{pmatrix}} \; ,$$

und bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. (Die Verteilung von X heißt *hypergeometrische Verteilung*)

(6 P.)

Lösung: Insgesamt werden n Kugeln aus $r + s$ Kugeln ausgewählt. Dafür gibt es $\binom{r+s}{n}$ Möglichkeiten. Um genau k rote Kugeln zu ziehen, muß man k aus den r roten Kugeln auswählen, und $n - k$ aus den s schwarzen Kugeln, d.h. man hat insgesamt $\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ Möglichkeiten. Daher folgt

$$p(X = k) \;=\; \frac{\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r+s \\ n \end{pmatrix}} \; .$$

für $0 \leq k \leq r$. Selbstverständlich gilt $p(X = k) = 0$ für alle anderen k. Da sich die Einzelwahrscheinlichkeiten zu 1 aufaddieren, gilt also

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r+s \\ n \end{pmatrix}} \;=\; 1 \; ,$$

d.h.

$$\sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ n-k \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r+s \\ n \end{pmatrix} \quad (*)$$

für alle $r, s, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq n \leq r+s$. Der Erwartungswert ergibt sich nun zu

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{r} k\, p(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{r} k \, \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{r} k \, \frac{r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+k+1)}{k!} \, (n-k)! \, \frac{1}{\binom{r+s}{n}} \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k)s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+k+2)}{k!} \, (n-k-1)! \, \frac{1}{\binom{r+s}{n}} \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k)}{k!} \, \frac{s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+k+2)}{(n-k-1)!} \, \frac{1}{\binom{r+s}{n}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} \binom{s}{n-1-k} \right) \frac{r}{\binom{r+s}{n}} \\
&\overset{(*)}{=} \binom{r-1+s}{n-1} \cdot \frac{r}{\binom{r+s}{n}} \\
&= \frac{r(r-1+s)!\; n!\; (r+s-n)!}{(n-1)!\; (r+s-n)!\; (r+s)!} \\
&= \frac{nr}{r+s} \, .
\end{aligned}$$

Hier haben wir Gleichung $(*)$ angewandt mit $r-1$ und $n-1$ anstelle von r und n. Das Ergebnis ist gerade n mal der Anteil der roten Kugeln, also anschaulich klar.

5. Die *Exponentialverteilung* mit Parameter $\alpha > 0$ ist definiert durch die Verteilungsfunktion

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha x), & \text{falls } x \geq 0 \;, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei X eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(4 P.)

Lösung: Es gilt also

$$F'(x) \;=\; \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), & \text{falls } x \geq 0 \;, \\ 0, & \text{falls } x < 0 \;. \end{cases}$$

Wir haben dabei im Punkt 0 die rechtsseitige Ableitung gebildet. Daher berechnet sich der Erwartungswert von X unter Verwendung von Satz 11.3.1 aus HM I und anschließender partieller Integration zu

$$\begin{aligned} E(X) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} t \;\mathrm{d}F(t) \;&&=\; \int_0^{\infty} t \;\mathrm{d}F(t) \\ &=\; \int_0^{\infty} t\alpha \exp(-\alpha t)\;\mathrm{d}t \;&&=\; [-t\exp(-\alpha t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t)\;\mathrm{d}t \\ &=\; \left[-\frac{1}{\alpha}\;\exp(-\alpha t)\right]_0^{\infty} \;&&=\; \frac{1}{\alpha}\;. \end{aligned}$$

Für Varianz von X berechnen wir auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \;\mathrm{d}F(t) \;&=\; \int_0^{\infty} t^2\alpha \exp(-\alpha t)\;\mathrm{d}t \;&&=\; [-t^2\exp(-\alpha t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t\exp(-\alpha t)\;\mathrm{d}t \\ &=\; \frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty} t\alpha\exp(-\alpha t)\;\mathrm{d}t \;&&=\; \frac{2}{\alpha^2}\;. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \;=\; \frac{1}{\alpha^2}\;.$$

6. Von Ulm nach Stuttgart fahren zwei Züge. Insgesamt wollen 1000 Leute mitfahren, und jeder davon wählt zufällig (mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{2}$) einen der beiden Züge aus. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung die Anzahl N der Sitze, die beide Züge haben müssen, so daß mit 99% Sicherheit jeder Fahrgast einen Sitzplatz bekommt.

(4 P.)

Lösung: Es sei $N \geq 500$ die Anzahl der Sitze in beiden Zügen, und $m := N - 500$. Es sei X die Anzahl der Leute, die im ersten Zug mitfahren möchte. Dann ist die Zufallsgröße X binomialverteilt mit Parametern $n = 1000$ un $p = \frac{1}{2}$. Wir wissen daher, daß gilt

$$\mu \;:=\; E(X) \;=\; np \;=\; 500, \quad \sigma^2 \;:=\; \mathrm{Var}(X) \;=\; np(1-p) \;=\; 250\;.$$

Es sei A das Ereignis, daß jeder Fahrgast einen Sitzplatz gilt, und B das Ereignis, daß $|X - 500| \leq m$. Dann gilt offenbar $B \subseteq A$, und insbesondere

$$p(A) \;\geq\; p(|X - 500| \leq m)\;.$$

Die Tschebyscheffsche Ungleichung liefert

$$1 - p(A) \;\leq\; p(|X - 500| \geq m) \;=\; p(|X - \mu| \geq m) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{m^2} \;=\; \frac{250}{m^2}\;.$$

Um die Bedingung $p(A) \geq 0.99$ zu erfüllen, also $1 - p(a) \leq 0.01$, richten wir m so ein, daß $\frac{250}{m^2} \leq 0.01$ ist, d.h. $m^2 \geq 25000$, d.h.

$$m \;\geq\; \sqrt{25000} \;=\; 50\sqrt{10} \;\approx\; 158.1\;.$$

Also ergibt sich als Lösung $m = 159$ und $N = 659$.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05