SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

13. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

keine Abgabe

1. Es bezeichne (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen, wobei X_i 1 ist, falls im $i-$ten Wurf eine 6 fällt, und 0 sonst $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann gilt also $p(X_i = 1) = \frac{1}{6}$ und $p(X_i = 0) = \frac{5}{6}$ und

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 0 \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{6} \\ Var(X_i) &= \tfrac{1}{6}\left(1 - \tfrac{1}{6}\right)^2 + \tfrac{5}{6}\left(0 - \tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{5}{36}\,. \end{aligned}$$

für alle i. Wir können also annehmen, daß die Folge unabhängig und identisch verteilt ist und setzen

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

als die Summe der bis zum $n-$ten Wurf gefallenen 6er. Dann gilt nach dem zentralen Grenzwertsatz, daß für $n = 360.000$

$$\begin{aligned} p(S_{360.000} \leq 40.000) &= p\left(\tfrac{S_{360.000} - 360.000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36}}\sqrt{360.000}} \leq \tfrac{40.000 - 360.000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36}}\sqrt{360.000}}\right) \\ &= p\left(\tfrac{S_{360.000} - 60.000}{10.000\sqrt{5}} \leq -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &\approx \int_{-\infty}^{-\frac{2}{\sqrt{5}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \;\approx\; 0{,}1855 \end{aligned}$$

ist.

2. a) Die Zufallsvariable X bezeichne den Nettogewinn des Spiels. Es gibt nun 38 Felder, und beim Setzen auf schwarz gewinnt der Spieler insgesamt auf 19 Feldern. Demnach ist $p(X = 1) = p(X = -1) = \frac{1}{2}$ und das Spiel ist nun fair. Außerdem folgt

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \tfrac{1}{2} + (-1) \cdot \tfrac{1}{2} = 0 \\ Var(X) &= \tfrac{1}{2}\,(1 - 0)^2 + \tfrac{1}{2}\,(-1 - 0)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

   b) Nun sei (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen, wobei X_i der Nettogewinn im $i-$ten Spiel ist. Wir setzen

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

als den Nettogewinn nach n Spielen. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt für $n = 100$

$$\begin{aligned} p(S_{100} \leq 10) &= p\left(\tfrac{S_{100} - 100 \cdot 0}{\sqrt{1}\sqrt{100}} \leq \tfrac{-10 - 100 \cdot 0}{\sqrt{1}\sqrt{100}}\right) \\ &= p\left(\tfrac{S_{100}}{10} \leq -1\right) \\ &\approx \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \;\approx\; 0{,}1587\,. \end{aligned}$$

3. Wir definieren den Vektor $e = (1, \dots, 1)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$Pe = e = 1 \cdot e\,,$$

weil die Zeilensummen einer stochastischen Matrix gerade 1 sind. Also ist 1 ein Eigenwert von P mit zugehörigem Eigenvektor e.

4. a) Wir berechnen das charakteristische Polynom von P

$$\begin{aligned}
p_P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} p-\lambda & q & 0 \\ q & -\lambda & p \\ q & p & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda \det \begin{pmatrix} p-\lambda & q \\ q & -\lambda \end{pmatrix} - p \det \begin{pmatrix} p-\lambda & q \\ q & p \end{pmatrix} \\
&= \lambda\left(\lambda(p-\lambda) + q^2\right) - P\left(p(p-\lambda) - q^2\right) \\
&= -\lambda^3 + p\lambda^2 + (1-p)^2\lambda - p\left(p^2 - \lambda p - (1-p)^2\right) \\
&= -\lambda^3 + p\lambda^2 + (1-2p+2p^2)\lambda - p(2p-1)
\end{aligned}$$

und erhalten mit der Kenntnis, daß 1 ein Eigenwert ist, unter Verwendung von Polynomdivision (oder Hornerschema)

$$p_P(\lambda) = -(\lambda-1)\underbrace{\left(\lambda^2 - (p-1)\lambda - p(2p-1)\right)}_{=:q_P(\lambda)}\,.$$

Es gilt jetzt

$$q_P(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{p-1}{2} \pm \frac{|3p-1|}{2}\,,$$

also sind die Eigenwerte von P

$$1\,,\ \frac{p-1}{2} + \frac{|3p-1|}{2}\,,\ \frac{p-1}{2} - \frac{|3p-1|}{2}\,.$$

b) Für $p = \frac{1}{2}$ hat nach a) die Matrix P die Eigenwerte $1, 0, -\frac{1}{2}$ und ist somit diagonalisierbar. Wir bestimmen nun eine Transformationsmatrix T derart, daß

$$T^{-1}PT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Nach 3. ist der Vektor $(1,1,1)^{\mathrm{t}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen noch die Eigenräume

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Eig}_P(0) &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \,:\, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
\mathrm{Eig}_P(-\tfrac{1}{2}) &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, \mu \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

und setzen demnach

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Die Inverse von T berechnet sich zu

$$
T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

und wir schließen

$$
P^n = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}
$$

für $N \in \ltimes$.

c) Nach 100 Durchgängen befindet sich das System im Zustand

$$
a^{\mathrm{t}} P^{100} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{100}} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3 \cdot 2^{100}} \end{pmatrix} .
$$