SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

2. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 29.04.2005, vor den Übungen

1. Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $X := C[a, b]$ der normierte Raum der stetigen Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup f([a, b])$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und stetig ist.

   (4 P.)

   Lösung: Es wird für $f, g \in X$

$$\begin{aligned} |\varphi(f-g)| &= \left| \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq (b-a) \cdot \sup |f-g|([a, b]) \\ &= (b-a) \cdot \|f-g\| \,. \end{aligned}$$

   Also erfüullt φ eine Lipschitz-Bedingung mit Konstante $b - a$. Nach Vorlesung ist φ insbesondere stetig.

2. Zeigen Sie, daß die Menge $\{\sin(xy) + e^{x^2+y} |\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes reelles Intervall ist.

   (4 P.)

   Lösung: Man betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} M := \{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (x, y)^{\mathrm{t}} &\mapsto \sin(xy) + e^{x^2+y} \,. \end{aligned}$$

   Die Menge M ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Außerdem ist die Menge M zusammenhängend. Ferner ist f eine stetige Funktion (als Summe von Produkten von Kompositionen stetiger Funktionen). Nach Vorlesung ist daher die zu betrachtende Menge

$$f(M) = \{\sin(xy) + e^{x^2+y} |\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

   eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, also ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$.

3. Es sei $g_k(x_1, x_2) := (x_1^k + x_2)/k^2$, für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie möglichst große Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ so, daß die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ gleichmäßig auf D konvergiert (mit Beweis).

   (4 P.)

Lösung: Wir wollen *alle* Mengen D bestimmen derart, daß die Funktionenreihe auf D gleichmäßig konvergiert.

Zunächst divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(x_1^k + x_2)/k^2$ im Falle $|x_1| > 1$. Also ist die Relation

$$D \subseteq [-1,1] \times \mathbb{R}$$

zumindest notwendig dafür, daß die Funktionenreihe auf D gleichmäßig konvergiert.

Wir behaupten nun, daß die Funktionenreihe auf D gleichmäßig konvergiert genau dann, wenn es ein $c > 0$ gibt so, daß

$$D \subseteq [-1,1] \times [-c,c] .$$

Zum Beweis der Hinlänglichkeit sei $D \subseteq [-1,1] \times [-c,c]$ für ein $c > 0$ vorausgesetzt. Dann folgt die Ungleichung

$$|g_k(x_1,x_2)| \leq \frac{1+c}{k^2} ,$$

und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+c}{k^2} < \infty .$$

Nach dem Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert die Funktionenreihe auf D also gleichmäßig.

Zum Beweis der Notwendigkeit sei D gegeben derart, daß die Funktionenreihe auf D gleichmäßig konvergiert. Wir wissen nach obigem bereits, daß $D \subseteq [-1,1] \times \mathbb{R}$. Nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $\mu \geq m \geq N$ und alle $x \in D$ gilt $|\sum_{k=m+1}^{\mu} g_k(x)| < \varepsilon$. Insbesondere folgt für alle $x = (x_1,x_2)^{\mathrm{t}} \in D$

$$\begin{aligned} 1 > |g_{N+1}(x_1,x_2)| &= \left| \frac{x_1^{N+1} + x_2}{(N+1)^2} \right| \\ \geq \frac{|x_2|}{(N+1)^2} - \frac{|x_1|^{N+1}}{(N+1)^2} &\geq \frac{|x_2|}{(N+1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \\ = \frac{|x_2|-1}{(N+1)^2} . \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$|x_2| < (N+1)^2 + 1 =: c ,$$

d.h. es gilt $D \subseteq [-1,1] \times [-c,c]$.

Damit haben wir obige Behauptung bewiesen. Möglichst große Mengen D derart, daß die Funktionenreihe auf D gleichmäßig konvergiert, sind also die Mengen $[-1,1] \times [-c,c]$ für beliebige $c > 0$. Jede möglich Menge D ist Teilmenge einer solchen Menge $[-1,1] \times [-c,c]$.

4. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) := \left(\cos(x_1 + x_2)\ ,\ \log(x_1^2 + e^{x_2})\right)^{\mathrm{t}}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(x_1 x_2)}{n^2}$.

(je 2 P.)

Lösung:

(i) Die Funktion f läßt sich komponentenweise als Komposition von Summen stetiger Funktionen schreiben. Sie ist folglich selbst stetig. Genauer, bezeichnet man die Projektionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \mapsto x_1$ bzw. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \mapsto x_2$ mit p_1 bzw. p_2, so gilt

$$f \ = \ \begin{pmatrix} \cos \circ (p_1 + p_2) \\ \log \circ (p_1 \cdot p_1 + \exp \circ p_2) \end{pmatrix}$$

und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sind jeweils stetig.

(ii) Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^{\mathrm{t}}\}$, denn sie ist Quotient stetiger Funktionen. Im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$ ist f jedoch nicht stetig. Es sei dazu die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n \ := \ \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \end{pmatrix} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} a_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lim_{n \to \infty} f(a_n) &= \lim_{n \to \infty} \frac{(1/n)^2}{(1/n)^2 + (1/n)^2} \\ &= \frac{1}{2} \neq f(0,0) . \end{aligned}$$

Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit ist daher f nicht stetig im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$.

(iii) Wie im vorigen Beispiel ist f stetig in jedem Punkt $\neq (0,0)^{\mathrm{t}}$. Die Stetigkeit im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$ muß jedoch gesondert betrachtet werden.

Für $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \neq (0,0)^{\mathrm{t}}$ beachten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0,0)| &= \left| \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \\ &= \frac{|x_1| \cdot |x_2|^2}{\|x\|^2} \\ &\leq \frac{\|x\| \cdot \|x\|^2}{\|x\|^2} \\ &= \|x\| \, . \end{aligned}$$

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben und wählt man $\delta := \varepsilon$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < \|x\| < \delta$ demzufolge $|f(x) - f(0,0)| \leq \|x\| < \varepsilon$. Also ist f definitionsgemäß stetig im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$.

(iv) Es handelt sich um eine Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ mit $g_n(x_1, x_2) := \sin(x_1 x_2)/n^2$. Es gilt

$$|g_n(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{n^2} \, ,$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \, .$$

Nach dem Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz ist die Funktionenreihe gleichmäßig konvergent. Da alle Summanden g_n stetige Funktionen sind, ist nach Vorlesung auch die Funktionenreihe f stetig.

5. Für einen Multiindex $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir $p! := p_1! \cdot \ldots \cdot p_n!$. Zeigen Sie, daß für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^n$ die Identität

$$e^{x_1 + \ldots + x_n} = \sum_{p \in \mathbb{N}_0^n} \frac{x^p}{p!}$$

gilt, und die Potenzreihe konvergiert absolut.

(4 P.)

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} e^{x_1 + \ldots + x_n} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1^k}{k!} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=1}^{\infty} \frac{x^{p_1}}{p_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{x^{p_n}}{p_n!} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}_0^n} \frac{x^p}{p!} \, , \end{aligned}$$

und nach HM I konvergieren alle vorkommenden Reihen absolut.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05