Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 5.5.2005, vor den Übungen

1. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Funktion f.

   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \mapsto (e^{x_1 x_2} \cos x_2\ ,\ x_1 + x_2^3)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$.

   (iii) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{1}{\|x\|}\, x$.

(je 2 P.)

Lösung:

(i) Es wird

$$f'(x_1, x_2) \ = \ \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1 x_2} \cos x_2 & x_1 e^{x_1 x_2} \cos x_2 - e^{x_1 x_2} \sin x_2 \\ 1 & 3x_2^2 \end{pmatrix} .$$

(ii) Es gilt $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Also folgt

$$f_{x_\nu}(x_1, \ldots, x_n) \ = \ \frac{2x_\nu}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \ = \ \frac{x_\nu}{\|x\|} .$$

Insgesamt ist daher

$$f'(x) \ = \ \left(\frac{x_1}{\|x\|} \ , \ \ldots \ , \ \frac{x_n}{\|x\|} \right) \ = \ \frac{1}{\|x\|}\, x^{\mathrm{t}} .$$

(iii) Es gilt $f = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{t}}$ mit $f_i(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$. Nach (ii) wissen wir bereits, daß $\frac{\partial \|x\|}{\partial x_\nu} = \frac{x_\nu}{\|x\|}$. Also folgt mit der Quotientenregel und $e_{i,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x) \ &= \ \frac{\partial \dfrac{x_i}{\|x\|}}{\partial x_\nu} \\ &= \ \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial x_\nu} \|x\| - x_i \, \dfrac{\partial \|x\|}{\partial x_\nu}}{\|x\|^2} \\ &= \ \frac{e_{i,\nu} \|x\| - x_i \, \dfrac{x_\nu}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\ &= \ \frac{1}{\|x\|} \left(e_{i,\nu} - \frac{1}{\|x\|^2}\, x_i x_\nu \right) . \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(x)\right)_{i,\nu=1,\dots,n} \\ &= \frac{1}{\|x\|}\left(e_{i,\nu} - \frac{1}{\|x\|^2}\, x_i x_\nu\right)_{i,\nu=1,\dots,n} \\ &= \frac{1}{\|x\|}\left(E_n - \frac{xx^{\mathrm{t}}}{\|x\|^2}\right) . \end{aligned}$$

2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^3 + x_1 x_2^2$. Für welche $e \in \mathbb{R}^2$ mit $\|e\| = 1$ wird die Richtungsableitung $f_e(1,1)$ maximal bzw. minimal, und was sind diese Extremwerte? (2 P.)

Lösung: Es gilt

$$f'(x_1,x_2) = \left(3x_1^2 + x_2^2\ ,\ 2x_1x_2\right)$$

und speziell $f'(1,1) = (4,2)$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt für $e = (e_1, e_2)^{\mathrm{t}}$ mit $\|e\| = 1$

$$|f_e(1,1)| = |f'(1,1)\cdot e| \le \left\|\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\| \cdot \|e\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$$

Hierbei tritt Gleichheit ein genau dann, wenn $(f'(1,1))^{\mathrm{t}}$ und e linear abhängig sind, d.h. wenn

$$e = \pm\frac{1}{\|(f'(1,1))^{\mathrm{t}}\|}\,(f'(1,1))^{\mathrm{t}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} .$$

Die Richtungsableitung $f_e(1,1)$ wird also maximal bzw. minimal für $e = \frac{1}{2\sqrt{5}}(4,2)^{\mathrm{t}}$ bzw. $e = -\frac{1}{2\sqrt{5}}(4,2)^{\mathrm{t}}$, und diese Extremwerte sind $2\sqrt{5}$ bzw $-2\sqrt{5}$.

3. (i) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die differenzierbar im Punkt $a \in U$ sei. Der *Tangentialraum* zur Funktion f an der Stelle a ist definiert durch

$$T_f(a) := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, y = f(a) + f'(a)(x-a) \right\} .$$

(Im Falle $n = 2$ und $m = 1$ spricht man auch von einer *Tangentialebene*.) Zeigen Sie, daß gilt

$$T_f(a) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, (f'(a)\ ,\ -E_m)\cdot\left(z - \begin{pmatrix}a\\f(a)\end{pmatrix}\right) = 0 \right\} .$$

(ii) Bestimmen Sie die Tangentialebene zur Funktion $f(x_1,x_2) := x_1^3 + x_2^4$ an der Stelle $(1,1)^{\mathrm{t}}$. Geben Sie eine Koordinatengleichung und eine Parameterdarstellung der Ebene an. (je 3 P.)

Lösung:

(i) Es sei $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \in T_f(a) &\iff y = f(a) + f'(a)(x-a) \\ &\iff f'(a)(x-a) - E_m(y - f(a)) = 0 \\ &\iff \left(f'(a)\ ,\ -E_m\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \right) = 0\ . \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$f'(x_1, x_2) \ = \ \left(3x_1^2\ ,\ 4x_2^3\right)$$

und somit $f'(1,1) = (3,4)$. Mit (i) wird

$$\begin{aligned} T_f(1,1) \ &= \ \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ (3\ ,\ 4\ ,\ -1) \cdot \begin{pmatrix} z_1 - 1 \\ z_2 - 1 \\ z_3 - 2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \ \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ 3z_1 + 4z_2 - z_3 - 5 = 0 \right\}\ . \end{aligned}$$

Also haben wir eine Koordinatengleichung $3z_1 + 4z_2 - z_3 - 5 = 0$ für die Tangentialebene gefunden. Für eine Parameterdarstellung brauchen wir zwei linear unabhängige Vektoren, die zum Normalenvektor $(3,4,-1)^{\mathrm{t}}$ senkrecht stehen, z.B. $(1,0,3)^{\mathrm{t}}$ und $(0,1,4)^{\mathrm{t}}$. Eine mögliche Parameterdarstellung der Tangentialebene ist also

$$T_f(1,1) \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ \middle| \ r, s \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

4. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) \ := \ \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\ .$$

(i) Zeigen Sie, daß alle Richtungsableitungen $f_e(x)$ existieren, für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und alle $e \in \mathbb{R}^2$ mit $\|e\| = 1$. Bestimmen Sie speziell die Richtungsableitungen im Punkt $x = (0,0)^{\mathrm{t}}$.

(ii) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt $x = (0,0)^{\mathrm{t}}$.

(iii) Zeigen Sie, daß die Funktion nicht differenzierbar im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$ ist.

(je 2 P.)

Lösung:

(i) Es sei $e = (e_1, e_2)^{\mathrm{t}}$ mit $e_1^2 + e_2^2 = 1$. Zunächst ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ offenbar stetig differenzierbar, also auch total differenzierbar, und alle Richtungsableitungen existieren. Wir wollen $f_e(0,0)$ gesondert berechnen. Es wird

$$f_e(0,0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(he) - f(0)) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, \frac{he_1 h^2 e_2^2}{h^2 e_1^2 + h^2 e_2^2} \;=\; e_1 e_2^2 \;.$$

(ii) Die partiellen Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen. Nach (i) folgt also

$$\mathrm{grad} f(0,0) \;=\; (0,0) \;.$$

(iii) Es sei $e := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^{\mathrm{t}}$. Wäre f differenzierbar in $(0,0)^{\mathrm{t}}$, so gälte nach Vorlesung die Gleichung $f_e(0,0) = (\mathrm{grad} f(0,0)) \cdot e$. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} f_e(0,0) \;&=\; \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ (\mathrm{grad} f(0,0)) \cdot e \;&=\; (0,0)\cdot e \;=\; 0 \;. \end{aligned}$$

Daher ist f in $(0,0)^{\mathrm{t}}$ nicht differenzierbar.

5. Berechnen Sie $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(tx)}{t}\, \mathrm{d}t$ für $x > 0$. (4 P.)

Lösung: Es sei $f : (\mathbb{R}_{>0})^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) \;:=\; \int_x^y \frac{\sin(tz)}{t}\, \mathrm{d}t \;.$$

Nach Vorlesung folgt

$$\frac{\partial}{\partial z}\, f(x,y,z) \;=\; \int_x^y \frac{\partial}{\partial z} \frac{\sin(tz)}{t}\, \mathrm{d}t \;=\; \int_x^y \cos(tz)\, \mathrm{d}t \;=\; \frac{\sin(yz) - \sin(xz)}{z} \;.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\, f(x,y,z) \;&=\; -\frac{\sin(xz)}{x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\, f(x,y,z) \;&=\; \frac{\sin(yz)}{y} \;. \end{aligned}$$

Setzt man noch $g(x) := (x^2, x^3, x)^{\mathrm{t}}$, so folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(tx)}{t} \, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) \\
&= f'(g(x)) g'(x) \\
&= \left(f_x(x^2, x^3, x) \; , \; f_y(x^2, x^3, x) \; , \; f_z(x^2, x^3, x) \right) \begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\sin(x^3)}{x^2} \, 2x + \frac{\sin(x^4)}{x^3} \, 3x^2 + \frac{\sin(x^4) - \sin(x^3)}{x} \\
&= 4 \, \frac{\sin(x^4)}{x} - 3 \, \frac{\sin(x^3)}{x} \; .
\end{aligned}$$

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05