SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler
4. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 12.5.2005, vor den Übungen

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß für alle $a, b, c, d \in [1, e]$ gilt, daß

$$|(\log a)(\log b) - (\log c)(\log d)| \le |a - c| + |b - d| \,.$$

Lösung: Es sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) \;:=\; (\log x)(\log y)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es für $(a, b)^{\mathrm{t}}, (c, d)^{\mathrm{t}} \in [1, e] \times [1, e]$ ein $(x, y)^{\mathrm{t}} \in [1, e] \times [1, e]$ derart, daß

$$f(a, b) - f(c, d) \;=\; f'(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix} .$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
|(\log a)(\log b) - (\log c)(\log d)| &= |f(a, b) - f(c, d)| \\
&= \left| f'(x, y) \cdot \tbinom{a-c}{b-d} \right| \\
&= \left| \left(\tfrac{\log y}{x} \,,\; \tfrac{\log x}{y} \right) \cdot \tbinom{a-c}{b-d} \right| \\
&= \left| \tfrac{(\log y)(a-c)}{x} + \tfrac{(\log x)(b-d)}{y} \right| \\
&\le \tfrac{|\log y||a-c|}{|x|} + \tfrac{|\log x||b-d|}{|y|} \\
&\le |a - c| + |b - d| \,.
\end{aligned}$$

2. Es sei $f(x_1, x_2) := e^{x_1} \sin x_2$.

   (i) Bestimmen Sie $(\nabla h)^k f$ für $k = 0, 1, 2, 3$ und $h = (h_1, h_2)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) Zeigen Sie, daß für $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ gilt, daß

$$\left| \left(e^{h_1} \sin h_2\right) - h_2 - h_1 h_2 \right| \le \frac{1}{2}\, e^{h_1} (|h_1| + |h_2|)^3 \,.$$

Lösung:

(i) Es wird

$$\begin{aligned}
(\nabla h)^0 f &= f \\
&= e^{x_1}\sin x_2 \\
(\nabla h)^1 f &= f'h \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial x_1}\, h_1 + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}\, h_2 \\
&= e^{x_1}(\sin x_2)h_1 + e^{x_1}(\cos x_2)h_2 \\
(\nabla h)^2 f &= h^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} \end{pmatrix} h \;=\; \tfrac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}\, h_1^2 + 2\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\, h_1 h_2 + \tfrac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}\, h_2^2 \\
&= e^{x_1}(\sin x_2)h_1^2 + 2e^{x_1}(\cos x_2)h_1h_2 - e^{x_1}(\sin x_2)h_2^2 \\
(\nabla h)^3 f &= \tfrac{\partial^3 f}{(\partial x_1)^3}\, h_1^3 + 3\,\tfrac{\partial^3 f}{(\partial x_1)^2 \partial x_2}\, h_1^2 h_2 + 3\,\tfrac{\partial^3 f}{\partial x_1 (\partial x_2)^2}\, h_1 h_2^2 + \tfrac{\partial^3 f}{(\partial x_2)^3}\, h_2^3 \\
&= e^{x_1}(\sin x_2)h_1^3 + 3e^{x_1}(\cos x_2)h_1^2h_2 - 3e^{x_1}(\sin x_2)h_1h_2^2 - e^{x_1}(\cos x_2)h_2^3\,.
\end{aligned}$$

(ii) Zunächst beachten wir

$$\begin{aligned}
|(\nabla h)^3 f| &\le e^{x_1}|h_1|^3 + 3e^{x_1}h_1^2|h_2| + 3e^{x_1}|h_1|h_2^2 + e^{x_1}|h_2|^3 \\
&= e^{x_1}\left(|h_1| + |h_2|\right)^3\;.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Taylor wird mit $x = (0,0)^{\mathrm{t}}$ und $m = 2$

$$\begin{aligned}
\left|\left(e^{h_1}\sin h_2\right) - h_2 - h_1h_2\right| &= \left|f(h_1,h_2) - f(0,0) - (\nabla h)^1 f(0,0) - \tfrac{1}{2}(\nabla h)^2 f(0,0)\right| \\
&= \left|\int_0^1 \tfrac{(1-t)^2}{2}\,(\nabla h)^3 f(th_1, th_2)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \tfrac{1}{2}\, e^{h_1}(|h_1| + |h_2|)^3\,.
\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des vereinfachten Newton-Verfahrens eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$2x^3y - x^2y^3 = 0$$
$$3xy^3 + x^3y^2 - 5 = 0$$

in der Nähe des Punktes $(x,y)^{\mathrm{t}} = (1,1)^{\mathrm{t}}$. Es sei dazu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := (2x^3y - x^2y^3, 3xy^3 + x^3y^2 - 5)^{\mathrm{t}}$ und $A := (f'(1,1))^{-1}$. Man verwende die Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - A \cdot f(x_n, y_n)\;.$$

Schreibt man dies komponentenweise, so lautet der Maple-Befehl

```
x[1]:=1; y[1]:=1; for n from 1 to 100 do x[n+1]:=evalf(phi(x[n],y[n]));
y[n+1]:=evalf(psi(x[n],y[n])); end do;
```

(6 P.)

Lösung: Es wird

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x^2y - 2xy^3 & 2x^3 - 3x^2y^2 \\ 3y^3 + 3x^2y^2 & 9xy^2 + 2x^3y \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} f'(1,1) &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} , \\ A &= \tfrac{1}{50} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Komponentenweise lautet die Rekursionsgleichung also

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \tfrac{11}{50}(2x_n^3y_n - x_n^2y_n^3) - \tfrac{1}{50}(3x_ny_n^3 + x_n^3y_n^2 - 5) \\ y_{n+1} &= y_n - \tfrac{-6}{50}(2x_n^3y_n - x_n^2y_n^3) - \tfrac{4}{50}(3x_ny_n^3 + x_n^3y_n^2 - 5) . \end{aligned}$$

Also lauten die Maple-Befehle wie folgt.

```
> g:=(x,y)->2*x^3*y-x^2*y^3; h:=(x,y)->3*x*y^3+x^3*y^2-5;
```

$$g := (x, y) \to 2x^3y - x^2y^3$$

$$h := (x, y) \to 3xy^3 + x^3y^2 - 5$$

```
> phi:=(x,y)->x-11/50*g(x,y)-1/50*h(x,y);
```

$$\phi := (x, y) \to x - \frac{11}{50}\, g(x, y) - \frac{1}{50}\, h(x, y)$$

```
> psi:=(x,y)->x+6/50*g(x,y)-4/50*h(x,y);
```

$$\psi := (x, y) \to x + \frac{3}{25}\, g(x, y) - \frac{2}{25}\, h(x, y)$$

```
> x[1]:=1; y[1]:=1;
```

$$x_1 := 1$$

$$y_1 := 1$$

```
> for n from 1 to 100 do:
> x[n+1]:=evalf(phi(x[n],y[n])):
> y[n+1]:=evalf(psi(x[n],y[n])); end do;
```

$$x_2 := 0.8000000000$$

$$y_2 := 1.200000000$$

$$x_3 := 0.7752768000$$

$$y_3 := 1.223987200$$

$$x_4 := 0.7675342329$$

$$y_4 := 1.231573270$$

$$x_5 := 0.7648714032$$

$$y_5 := 1.234196076$$

$$x_6 := 0.7639298792$$
$$y_6 := 1.235125297$$
$$x_7 := 0.7635938369$$
$$y_7 := 1.235457187$$
$$x_8 := 0.7634735023$$
$$y_8 := 1.235576065$$
$$x_9 := 0.7634303604$$
$$y_9 := 1.235618689$$
$$x_{10} := 0.7634148868$$
$$y_{10} := 1.235633978$$
$$x_{11} := 0.7634093362$$
$$y_{11} := 1.235639461$$
$$x_{12} := 0.7634073448$$
$$y_{12} := 1.235641429$$
$$x_{13} := 0.7634066304$$
$$y_{13} := 1.235642136$$
$$x_{14} := 0.7634063745$$
$$y_{14} := 1.235642388$$
$$x_{15} := 0.7634062825$$
$$y_{15} := 1.235642479$$
$$x_{16} := 0.7634062496$$
$$y_{16} := 1.235642512$$
$$x_{17} := 0.7634062377$$
$$y_{17} := 1.235642523$$
$$x_{18} := 0.7634062334$$
$$y_{18} := 1.235642528$$
$$x_{19} := 0.7634062320$$
$$y_{19} := 1.235642529$$
$$x_{20} := 0.7634062314$$
$$y_{20} := 1.235642529$$
$$x_{21} := 0.7634062312$$
$$y_{21} := 1.235642530$$
$$x_{22} := 0.7634062312$$
$$y_{22} := 1.235642530$$

Also ist $x = 0.7634062312$, $y = 1.235642530$ eine Näherungslösung des Gleichungssystems.

4. Es seien $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $0 < \lambda < \frac{1}{b-a}$. Zeigen Sie, daß es genau eine stetige Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, die der Integralgleichung

$$x(t) \;=\; f(t) + \lambda \int_a^b \sin(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

genügt.

Lösung: Es sei X der normierte Raum der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup f([a,b])$. Dann ist X vollständig. Es sei $\Phi : X \to X$ definiert durch

$$\Phi(x) : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) + \lambda \int_a^b \sin(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $x \in X$. Es folgt für $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y)\| &= \sup_{t\in[a,b]} \left| \lambda \int_a^b \sin(t-s)(x(s) - y(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \lambda \int_a^b |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \lambda(b-a) \cdot \|x - y\| \,. \end{aligned}$$

Also erfüllt Φ eine Lipschitzbedingung mit Kontraktionsparameter $\lambda(b-a) < 1$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau ein $x \in X$ mit $\Phi(x) = x$, d.h. genau eine stetige Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, die die Integralgleichung erfüllt.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05