SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

6. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 27.5.2005, vor den Übungen

Lemma *Es gilt* $\int (\cos u)^2\ du = \frac{1}{2}(\sin u)(\cos u) + \frac{u}{2}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\int (\cos u)^2 \, \mathrm{d}u &= (\sin u)(\cos u) + \int (\sin u)^2 \, \mathrm{d}u \\ &= (\sin u)(\cos u) + \int (1 - (\cos u)^2) \, \mathrm{d}u \\ &= (\sin u)(\cos u) + u - \int (\cos u)^2 \, \mathrm{d}u \ .\end{aligned}$$

Löst man dies nach $\int (\cos u)^2 \, \mathrm{d}u$ auf, so erhält man die Behauptung. $\square$.

1. Bestimmen Sie jeweils den Inhalt der Menge M.

   (i) $M := \{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\}$.

   (ii) $M := \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \le r^2,\ a \le y \le r\}$, wobei $0 < a < r$.

   (iii) $M := \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ a \le z \le r\}$, wobei $0 < a < r$.

   (je 2 P.)

   Lösung:

   (i) Die Menge M ist die Menge der Glieder einer konvergenten Folge. Nach Vorlesung ist M eine Nullmenge, d.h. es gilt $|M| = 0$.

   (ii) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ sei $M(y) := \{x \in \mathbb{R} |\ (x,y)^{\mathrm{t}} \in M\}$. Im Falle $a \le y \le r$ gilt dann $M(y) = [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]$, und sonst gilt $M(y) = \emptyset$. Nach dem Satz von Fubini für Inhalte und der Substitution $y = r \sin u$ gilt

$$\begin{aligned}|M| &= \int_a^r |M(y)| \, \mathrm{d}y \\ &= \int_a^r 2\sqrt{r^2 - y^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\arcsin(a/r)}^{\pi/2} 2\sqrt{r^2 - r^2(\sin u)^2} \, r \cos u \, \mathrm{d}u \\ &= 2r^2 \int_{\arcsin(a/r)}^{\pi/2} (\cos u)^2 \, \mathrm{d}u \\ &= 2r^2 \left[\tfrac{1}{2}(\sin u)(\cos u) + \tfrac{u}{2}\right]_{\arcsin(a/r)}^{\pi/2} \ .\end{aligned}$$

Man beachte nun

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin z) &= z \\ \cos(\arcsin z) &= \sqrt{1-(\sin(\arcsin z))^2} \\ &= \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

für $z \in [-1,1]$. Es folgt

$$|M| = \frac{\pi r^2}{2} - ar\sqrt{1-(a/r)^2} - r^2 \arcsin(a/r) .$$

(iii) Für jedes $z \in \mathbb{R}$ sei $M(z) := \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ (x,y,z) \in M\}$. Im Falle $a \le z \le r$ gilt dann $M(z) = \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \le r^2-z^2\}$ und somit $|M(z)| = \pi(r^2-z^2)$. Sonst gilt $M(z) = \emptyset$. Nach dem Satz von Fubini für Inhalte folgt

$$\begin{aligned} |M| &= \int_a^r |M(z)|\,\mathrm{d}z \\ &= \int_a^r \pi(r^2-z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= [\pi(r^2 z - z^3/3]_a^r \\ &= \pi\left(\tfrac{2}{3}\, r^3 - r^2 a + \tfrac{1}{3}\, a^3\right) . \end{aligned}$$

2. Es sei

$$M := \{(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n |\ x_1 \ge 0,\ldots,x_n \ge 0,\ x_1+\ldots+x_n \le k\} ,$$

wobei $k \ge 0$. Zeigen Sie, daß gilt

$$|M| = \frac{k^n}{n!} .$$

(6 P.)

Lösung: Wir führen Induktion nach n. Der Induktionsanfang ist klar, denn für $n=1$ ist $M=[0,k]$, und es folgt $|M|=k$. Im Induktionsschritt sei die Aussage für $n-1$ bewiesen, und wir wollen Sie für n beweisen. Es sei

$$M(y) := \{(x_1,\ldots,x_{n-1})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{n-1} |\ (x_1,\ldots,x_{n-1},y) \in M\} .$$

Im Falle $0 \le y \le k$ gilt dann

$$M(y) = \{(x_1,\ldots,x_{n-1})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{n-1} |\ x_1 \ge 0,\ldots,x_{n-1} \ge 0,\ x_1+\ldots+x_{n-1} \le k-y\} ,$$

und nach Induktionshypthese gilt

$$|M(y)| = \frac{(k-y)^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Ansonsten gilt $M(y) = \emptyset$. Nach dem Satz von Fubini für Inhalte ergibt sich

$$\begin{aligned} |M| &= \int_0^k |M(y)|\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^k \frac{(k-y)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[-\frac{(k-y)^n}{n!}\right]_0^k \\ &= \frac{k^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

3. Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-meßbare Teilmenge, $a = (a_1, a_2, h)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3$ mit $h > 0$, und K sei der Kegel im $\mathbb{R}^3$ mit Grundfläche $M \times \{0\}$ und a als Spitze, d.h.

$$K := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ h \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in [0,1],\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \right\}\,.$$

Bestimmen Sie den Inhalt von K.

(6 P.)

Lösung: Für jedes $z \in \mathbb{R}$ sei $K(z)$ der Schnitt von K mit der Ebene $x_3 = z$, d.h.

$$K(z) := \{(x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ (x_1, x_2, z)^{\mathrm{t}} \in K\}\,.$$

Also gilt im Falle $z \in [0, h]$

$$K(z) = \left\{ (z/h) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + (1 - z/h) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \right\}\,,$$

denn in der Darstellung

$$K := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ h \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in [0,1],\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \right\}\,.$$

sind die Punkte mit dritter Koordiante z gegeben durch $\lambda = z/h$. Ferner ist $K(z) = \emptyset$ im Falle $z \notin [0, h]$.

Im Falle $z \in [0, h]$ geht die Menge $K(z)$ aus M hervor durch eine Streckung um den Faktor $1 - z/h$ und eine Verschiebung. Genauer ist $K(z)$ das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto (z/h)(a_1, a_2)^{\mathrm{t}} + (1 - z/h)x\,. \end{aligned}$$

Es gilt $f(x) = Ax + b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1-z/h & 0 \\ 0 & 1-z/h \end{pmatrix}$ und $b = (a_1, a_2)^{\mathrm{t}}$. Daher gilt nach Satz 5.4.1

$$|K(z)| \;=\; |\det A| \cdot |M| \;=\; (1 - z/h)^2 \cdot |M| \; .$$

Mit dem Satz von Fubini für Inhalte folgt

$$\begin{aligned} |K| &= \int_0^h |K(z)| \, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^h (1 - z/h)^2 \cdot |M| \, \mathrm{d}z \\ &= |M| \int_0^h (1 - z/h)^2 \, \mathrm{d}z \\ &= |M| \left[-(1 - z/h)^3 \cdot (h/3) \right]_0^h \\ &= \tfrac{1}{3} \, h|M| \; , \end{aligned}$$

d.h. das Volumen des Kegels ist gleich $\frac{1}{3}$ mal Höhe mal Grundfäche.

4. Es sei $K := \{x \in \mathbb{R}^4 | \; \|x\| \le r\}$ eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt 0. Berechnen Sie den Inhalt von K. Sie dürfen dabei verwenden, daß eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius s den Inhalt $\frac{4}{3} \pi s^3$ hat.

(6 P.)

Lösung: Für $t \in \mathbb{R}$ sei $K(t)$ der Schnitt von K mit der Ebene $x_1 = t$, d.h.

$$K(t) \;:=\; \{(x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 | \; (t, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{t}} \in K\} \; .$$

Also gilt im Falle $t \in [-r, r]$

$$K(t) \;=\; \left\{ y \in \mathbb{R}^3 | \; \|y\| \le \sqrt{r^2 - t^2} \right\} \; ,$$

d.h $K(t)$ ist eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $\sqrt{r^2 - t^2}$, und es folgt

$$|K(t)| \;=\; \frac{4}{3} \, \pi (r^2 - t^2)^{3/2} \; .$$

Ferner ist $K(t) = \emptyset$ im Falle $t \notin [-r, r]$.

Nach dem Satz von Fubini für Inhalte und einer Substitution $t = r \sin u$ folgt

$$\begin{aligned}
|K| &= \int_{-r}^{r} |K(t)| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-r}^{r} \frac{4}{3}\,\pi (r^2 - t^2)^{3/2} \,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{4}{3}\,\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 - r^2(\sin u)^2)^{3/2}\, r\cos u \,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{4}{3}\,\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3(\cos u)^3 r\cos u \,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{4}{3}\,\pi r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u \;.
\end{aligned}$$

Das Integral $\int (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u$ lösen wir mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u &= (\sin u)(\cos u)^3 + 3\int (\cos u)^2(\sin u)^2 \,\mathrm{d}u \\
&= (\sin u)(\cos u)^3 + 3\int (\cos u)^2(1 - (\cos u)^2);\mathrm{d}u \\
&= (\sin u)(\cos u)^3 + 3\int (\cos u)^2 \,\mathrm{d}u - 3\int (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u \;.
\end{aligned}$$

Löst man dies nach $\int (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u$ auf, so ergibt sich nach dem obigen Lemma

$$\begin{aligned}
\int (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u &= \tfrac{1}{4}\,(\sin u)(\cos u)^3 + \tfrac{3}{4}\int (\cos u)^2 \,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{1}{4}(\sin u)(\cos u)^3 + \tfrac{3}{8}(\sin u)(\cos u) + \tfrac{3u}{8} \;.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
|K| &= \tfrac{4}{3}\,\pi r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos u)^4 \,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{4}{3}\,\pi r^4 \left[\tfrac{1}{4}(\sin u)(\cos u)^3 + \tfrac{3}{8}(\sin u)(\cos u) + \tfrac{3u}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{4}{3}\,\pi r^4\, \tfrac{3\pi}{8} \\
&= \tfrac{\pi^2}{2}\, r^4 \;.
\end{aligned}$$

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05