SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler 8. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 10.6.2005, vor den Übungen

Lemma *Es gilt*

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\;\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}\;\mathrm{d}t \;=\; 4\sqrt{2}\,.$$

Beweis: Wir verwenden

$$1-\cos(2u) \;=\; 1-\left((\cos u)^2-(\sin u)^2\right) \;=\; 2(\sin u)^2\,.$$

Mit der Substitution $t = 2u$ wird

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\;\mathrm{d}t &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos(2u)}\;\mathrm{d}u\\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(\sin u)^2}\;\mathrm{d}u\\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin u\;\mathrm{d}u\\ &= 2\sqrt{2}\,[-\cos u]_0^{\pi}\\ &= 4\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Verwendet man $1+\cos(2u) = 2(\cos u)^2$, so erhält man auf analoge Weise

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}\;\mathrm{d}t \;=\; 4\sqrt{2}\,.$$

□

1. Bestimmen Sie jeweils die Länge der Kurve γ mit der Parameterdarstellung $x(t)$.

   (i) $x(t) = (t-\sin t,\ 1-\cos t)^{\mathrm{t}}$, $t \in [0, 2\pi]$. („Zykloide“)

   (ii) $x(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ht)^{\mathrm{t}}$, $t \in [0, 2\pi n]$, wobei $n \in \mathbb{N}$. (Schraubenlinie)

   (je 2 P.)

   Lösung:

(i) Es wird unter Verwendung des obigen Lemmas

$$
\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|x'(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \|(1-\cos t,\ \sin t)^{\mathrm{t}}\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+(\cos t)^2 - 2\cos t + (\sin t)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} \, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} \, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} \\
&= 8\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Es wird

$$
\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi n} \|x'(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi n} \|(-r\sin t,\ r\cos t,\ h)^{\mathrm{t}}\| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi n} \sqrt{r^2(\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2 + h^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi n} \sqrt{r^2+h^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 2\pi n\sqrt{r^2+h^2}\,.
\end{aligned}
$$

2. Die *Kardioide* (oder auch *Herzkurve*) ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, definiert durch die Polarkoordinatengleichung $r = 1+\cos\varphi$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve sowie ihre Länge.

   (4 P.)

   Lösung: Der Punkt mit den Polarkoordinaten r und φ hat die (cartesischen) Koordinaten $(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)^{\mathrm{t}}$. Also ist eine Parameterdarstellung der Kardioide γ gegeben durch

$$
x(t) \;=\; ((1+\cos t)\cos t,\ (1+\cos t)\sin t)^{\mathrm{t}},\ t\in[0,2\pi]\,.
$$

Also berechnet sich die Länge von γ mit Hilfe des obigen Lemmas zu

$$
\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|x'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \|(-\sin t - 2(\cos t)(\sin t),\ \cos t + 1 - 2(\sin t)^2)^{\mathrm{t}}\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\begin{array}{l}(\sin t)^2 + 4(\cos t)^2(\sin t)^2 + 4(\sin t)^2(\cos t) \\ +(\cos t)^2 + 1 + 4(\sin t)^4 + 2\cos t - 4(\sin t)^2(\cos t) - 4(\sin t)^2\end{array}} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t} \,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} \,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \\
&= 8 \,.
\end{aligned}
$$

3. Bestimmen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma f^{\mathrm{t}}(x)\,\mathrm{d}x$. Ist das Vektorfeld f konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von f.

   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y,\ y - x)^{\mathrm{t}}$, $\gamma : x(t) = (t,\ t^2)^{\mathrm{t}}$, $t \in [0,2]$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x^2y^2z + 1,\ 2x^3yz + z,\ x^3y^2 + y)^{\mathrm{t}}$, $\gamma : x(t) = (e^t,\ \cos t,\ t^2 + 1)^{\mathrm{t}}$, $t \in [0,\pi]$.

(2+4 P.)

Lösung:

(i) Zunächst berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial y}{\partial y} &&= 1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{\partial (y - x)}{\partial x} &&= -1 \,.
\end{aligned}
$$

Also erfüllt f nicht die Integrabilitätsbedingungen und ist daher auch nicht konservativ. Das Kurvenintegral ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\int_\gamma f^{\mathrm{t}}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 f^{\mathrm{t}}(x(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^2 (t^2,\ t^2-t)\cdot\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^2 (2t^3-t^2)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\tfrac{t^4}{2}-\tfrac{t^3}{3}\right]_0^2\\ &= \tfrac{16}{3}\,.\end{aligned}$$

(ii) Hier erfüllt f die Integrabilitätsbedingungen, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y} &= 6x^2yz &&= \frac{\partial f_2}{\partial x}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 3x^2y^2 &&= \frac{\partial f_3}{\partial x}\\ \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 2x^3y+1 &&= \frac{\partial f_3}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

Ferner ist der Definitionsbereich von f sternförmig. Also ist nach Satz 7.4.3 das Vektorfeld f konservativ.

Zur Berechnung einer Stammfunktion F von f gehen wir wie folgt vor.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \overset{!}{=} 3x^2y^2z+1 \implies F(x,y,z) = x^3y^2z+x+c(y,z)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c, die nur von y und z abhängt. Daraus folgt

$$2x^3yz+\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \overset{!}{=} 2x^3yz+z \implies c(y,z) = yz+d(z)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion d, die nur von z abhängt. Schließlich gilt

$$x^3y^2+y+d'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} \overset{!}{=} x^3y^2+y \implies d(z)=\text{const.}$$

Wir können also $d(z):=0$ setzen, und erhalten als Stammfunktion

$$F(x,y,z) = x^3y^2z+x+yz\,.$$

Nach Satz 7.3.3 folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f^{\mathrm{t}}(x)\,\mathrm{d}x &= F(x(\pi)) - F(x(0)) \\ &= F(e^\pi,\ -1,\ \pi^2+1) - F(1,1,1) \\ &= e^{3\pi}(\pi^2+1) + e^\pi + \pi^2 - 2\,.\end{aligned}$$

4. Es sei $G := \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 |\ x \neq y\}$. Für welche Werte von a erfüllt das Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \left(\frac{ay}{(x-y)^2},\ \frac{2x}{(x-y)^2} + 1,\ z\right)^{\mathrm{t}}$$

die Integrabilitätsbedingungen? Ist das Vektorfeld f in diesem Fall konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von f.

(4 P.)

Lösung: Es wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{a(x+y)}{(x-y)^3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3}\end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}\,.$$

Also erfüllt f genau dann die Integrabilitätsbedingungen auf G, wenn $a = -2$.

Wir berechnen eine Stammfunktion F von f wie folgt.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \overset{!}{=} \frac{-2y}{(x-y)^2} \implies F(x,y,z) = \frac{2y}{x-y} + c(y,z)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c, die nur von y und z abhängt. Weiter gilt

$$\frac{2x}{(x-y)^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{2x}{(x-y)^2} + 1 = \implies c(y,z) = y + d(z)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion d, die nur von z abhängt. Schließlich gilt

$$d'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} \overset{!}{=} z \implies d(z) = \frac{z^2}{2} + \text{const.}$$

Wir können also $d(z) := \frac{z^2}{2}$ setzen und erhalten als Stammfunktion

$$F(x,y,z) \;=\; \frac{-2y}{(x-y)^2} + y + \frac{z^2}{2}\,.$$

Man beachte, daß das Gebiet G nicht sternförmig ist, ja noch nicht einmal einfach zusammenhängend. Trotzdem ist das Vektorfeld f konservativ, und es gilt $F' = f^{\mathrm{t}}$ auf G.

5. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) := \log(1 + \|x\|^2)x$.

   (i) Ist das Vektorfeld f konservativ?

   (ii) Für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ sei γ_y die Verbindungsstrecke von 0 nach y. Bestimmen Sie $\int_{\gamma_y} f^{\mathrm{t}}(x)\,\mathrm{d}x$.

   (iii) Bestimmen Sie mit Teil (ii) eine Stammfunktion von f.

(je 2 P.)

Lösung:

(i) Es gilt

$$f(x_1,x_2,x_3) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \log(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ x_2 \log(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ x_3 \log(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2) \end{pmatrix}\,.$$

Also folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \;=\; \frac{2x_1x_2}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} \;=\; \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,,$$

und aus Symmetriegründen folgen $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}$. Also erfüllt f die Integrabilitätsbedingungen auf $\mathbb{R}^3$. Nach Satz 7.4.3 ist das Vektorfeld f mithin konservativ, da das Gebiet $\mathbb{R}^3$ sternförmig ist.

(ii) Eine Parametrisierung von γ_y ist gegeben durch

$$x(t) = ty,\ t \in [0,1]\,.$$

Also gilt $x'(t) = y$ für alle $t \in [0,1]$. Mit der Substitution $u = 1+t^2\|y\|^2$

wird

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_y} f^{\mathrm{t}}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^{\mathrm{t}}(x(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \log(1+\|ty\|^2)(ty)^{\mathrm{t}}\cdot y\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \log(1+t^2\|y\|^2)t\|y\|^2\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2}\int_1^{1+\|y\|^2} \log u\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{1}{2}\left[u\log u - u\right]_1^{1+\|y\|^2} \\
&= \tfrac{1}{2}(1+\|y\|^2)\log(1+\|y\|^2) - \tfrac{1}{2}\,\|y\|^2\,.
\end{aligned}
$$

(iii) Nach Teil (i) besitzt das Vektorfeld f eine Stammfunktion F. Wir können o.E. $F(0)=0$ annehmen, da die Subtraktion einer Konstanten nichts an der Ableitung ändert. Mit Satz 7.3.3 und Teil (ii) folgt dann

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(1+\|y\|^2)\log(1+\|y\|^2) - \tfrac{1}{2}\,\|y\|^2 &= \int_{\gamma_y} f^{\mathrm{t}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(y) - F(0) \\
&= F(y)
\end{aligned}
$$

für alle $y \in \mathbb{R}^3$. Somit ist

$$
F(y) \;=\; \frac{1}{2}\,(1+\|y\|^2)\log(1+\|y\|^2) - \frac{1}{2}\,\|y\|^2
$$

eine Stammfunktion von f.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05