SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

1. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 22.04.2005, vor den Übungen

Schreibweise: Es bezeichne $M^\circ := \overset{\circ}{M}$ den offenen Kern einer Menge M.

1. Geben Sie jeweils M°, $\overline{M}$, ∂M und M' an (ohne Beweis).

   (i) $M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $a_i < b_i$ für $i = 1, 2, 3$.

   (ii) $M = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 |\ |y| > 1\}$.

   (iii) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (iv) $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \times (0, n) \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (v) $M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \middle|\ m, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

   (1+1+1+2+2 P.)

2. Es seien X ein normierter Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie, daß M' abgeschlossen ist.

   (2 P.)

3. Entscheiden Sie, ob folgende Relationen in einem normierten Raum gelten. Geben Sie jeweils einen Beweis für die Aussage oder ein Gegenbeispiel an.

   (i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   (ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

   (iii) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

   (iv) $\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B)$.

   (v) $A^\circ = \overline{A^\circ}^{\,\circ}$.

   (vi) $A''' = A''$.

   (je 2 P.)

4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit $x_0 := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Zeigen Sie, daß die Menge $M := \{x_n |\ n \geq 0\}$ kompakt ist.

   (3 P.)

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05

Tutoriumsaufgaben

1. Geben Sie jeweils M°, $\overline{M}$, ∂M und M' an (ohne Beweis).

   (i) $M = \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ 1 < x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(0,0)^{\mathrm{t}}\}$.

   (ii) $M = \left\{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

2. Entscheiden Sie, ob folgende Relationen in einem normierten Raum gelten. Geben Sie jeweils einen Beweis für die Aussage oder ein Gegenbeispiel an.

   (i) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

   (ii) $\partial(A \cap B) = (\partial A) \cap (\partial B)$.

   (iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.