SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

10. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 24.6.2005, vor den Übungen

1. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare skalare Funktion, und $g, h : G \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie.

   (i) $\operatorname{div}(g \times h) = \langle h, \text{rot } g\rangle - \langle g, \text{rot h}\rangle$.

   (ii) Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt $\text{rot}((\text{grad } f)^{\text{t}}) = 0$.

   (iii) Ist g zeimal stetig differenzierbar, so gilt $\operatorname{div}(\text{rot } g) = 0$.

   (je 2 P.)

2. Bestimmen Sie Divergenz und Rotation der Kugelkoordinatentransformation
$$g(r, \varphi, \theta) \ = \ \begin{pmatrix} r(\cos\varphi)(\cos\theta) \\ r(\sin\varphi)(\cos\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix} .$$
   (2 P.)

3. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der *Astroide*, die durch die Randkurve $\gamma : \binom{x(t)}{y(t)} = \binom{(\cos t)^3}{(\sin t)^3}$, $t \in [0, 2\pi]$ begrenzt wird.

   (5 P.)

4. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der obere Halbkreis um den Ursprung mit Radius 1. Ferner sei γ die positiv orientierte Randkurve von B. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_\gamma (x^3 \cos y + y^4 \exp(y^2)) \, \mathrm{d}y + (3x^2 \sin y - 2y + \log(x^4 + 1)) \, \mathrm{d}x \ .$$
   (5 P.)

5. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Bereich im 1. Quadranten, der von den Geraden $y = x$, $y = 1/x$ und $y = x/4$ begrenzt wird. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene den Inhalt sowie den Schwerpunkt von B.

   (Hinweis: Ist γ die positive orientierte Randkurve von B, so gilt $|B| = \frac{1}{2}\int_\gamma x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x$ und $\int_B x \, \mathrm{d}(x, y) = -\int_\gamma xy \, \mathrm{d}x$.)

   (6 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare skalare Funktion, und $g : G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie.

   (i) $\operatorname{div}(fg) = \langle \operatorname{grad} f, g\rangle + f \cdot \operatorname{div} g$.

   (ii) $\operatorname{rot}(fg) = f \cdot \operatorname{rot} \mathrm{g} + (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}} \times g$.

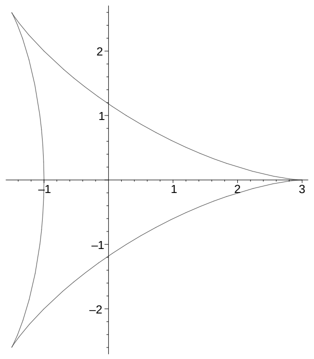
2. Bestimmen Sie Divergenz und Rotation der Zylinderkoordinatentransformation

$$g(r, \varphi, z) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} .$$

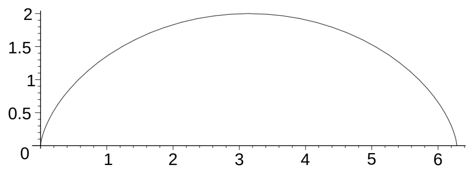
3. Die *Hypozykloide* mit drei Spitzen sei definiert durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix},\; t \in [0, 2\pi] .$$

   Berechnen Sie den Inhalt der davon berandeten Fläche. Skizze:



4. Die Zykloide wurde in Blatt 8, Aufgabe 1(i) definiert. Bestimmen Sie Inhalt und Schwerpunkt der von der Zykloide und der x-Achse eingeschlossenen Fläche. Skizze:



**Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05**