

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 1.7.2005, vor den Übungen

1. Gegeben sei die Parametrisierung der Oberfläche einer Kugel mit Radius $r > 0$

$$x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{Kugelkoordinaten}),$$

wobei $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ und $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Rechnen Sie nach, daß

$$\frac{\partial x(\varphi, \vartheta)}{\partial \varphi} \times \frac{\partial x(\varphi, \vartheta)}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \cdot x(\varphi, \vartheta)$$

gilt.

(3 P.)

2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche

$$F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0, x_3 = x_1 x_2\}.$$

(4 P.)

3. Es sei $f(x, y, z) = (-y, x, xyz)^t$ und F bezeichne die obere Hälfte der Einheitskugel. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_F \nu^t \operatorname{rot} f \, d\sigma.$$

(4 P.)

4. Gegeben sei die Fläche $F = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y + z = 1\}$ und das Vektorfeld $f(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)^t$. Berechnen Sie für den positiv orientierten Rand γ_F das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_F} f^t(x) \, dx.$$

(4 P.)

5. Es sei $B = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)^t$

$$\int_{\partial B} f^t(x, y, z) \nu \, d\sigma.$$

(4 P.)

Bitte wenden.

6. Eine Gruppe bestehend aus n Personen stellt aus ihrer Mitte ein k -köpfiges Komitee zusammen, wobei ein Mitglied des Komitees den Vorsitz erhält ($n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$). Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein solches Komitee mit Vorsitzendem zu bilden?

(2 P.)

7. Die berühmten Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat grübelten über folgendem Problem, das die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung einleitete: Ist es wahrscheinlicher, mit 4 Würfeln eines Würfels mindestens einmal die Sechs zu würfeln, oder mit 24 Würfeln und 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu bekommen?

- a) Finden Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das vierfache Werfen eines Würfels.
- b) Die Wahrscheinlichkeit, mit 24 Würfeln und 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu bekommen, liegt bei ungefähr 0,4914. Was ist nun die Antwort auf das Problem?

(2+2 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \right\} .$$

2. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_F \nu^t \operatorname{rot} f \, d\sigma$ mit

a) $f(x, y, z) = (-2y, xz, x^3)^t$, $F = \left\{ (x, y, z)^t : x^2 + y^2 \leq 4, z = 8 - (x^2 + y^2)^{3/2} \right\}$.

b) $f(x, y, z) = (xyz, -x, y^2)^t$, F die untere Hälfte der Einheitskugel.

3. Es sei $B = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 5\}$ ein Kreiszyylinder. Berechnen Sie für $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)^t$

$$\int_{\partial B} f^t(x) \nu \, d\sigma .$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto genau 4 Richtige (genau 3 Richtige) zu haben?
5. Finden Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das dreimalige Werfen eines Würfels und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dreimal dieselbe Augenzahl (einen oder zwei Fünfer) zu würfeln.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:

www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05