SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler 12. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 8.7.2005, vor den Übungen

1. Wir wollen n numerierte Bälle auf k numerierte Körbe verteilen. Es seien $n_1, \ldots, n_k \geq 0$ gegeben mit $n_1 + \ldots + n_k = n$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bälle so zu verteilen, daß für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ genau n_i Bälle im i-ten Korb landen?

   (3 P.)

2. In einer Stadt werden Tuberkulose-Untersuchungen durch Röntgenverfahren durchgeführt. Nehmen wir an, daß durch dieses Verfahren 90% aller Kranken als infiziert erkannt werden, daß aber andererseits 1% der Gesunden fälschlicherweise als infiziert registriert wird. Von der gesamten Bevölkerung seien 0.1% infiziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein als infiziert registrierter Bürger wirklich krank ist?

   (3 P.)

3. Bei einem Zufallsexperiment werfe man drei ideale Würfel. Die Ereignisse A, B, C seien wie folgt definiert.

   - A: Mindestens einer der Würfel zeigt eine 6.
   - B: Die Würfel zeigen drei verschiedene Augenzahlen.
   - C: Die Würfel zeigen lauter identische Augenzahlen.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ und $p(A \cap B)$. Sind die Ereignisse A und B unabhängig?

   (4 P.)

4. Eine Urne enthalte r rote und s schwarze Kugeln, wobei $r, s \geq 0$. Bei einem Zufallsexperiment ziehe man n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei $n \leq r + s$. Es sei X die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Zeigen Sie, daß für $0 \leq k \leq r$ gilt

   $$p(X = k) \;=\; \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} \,,$$

   und bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. (Die Verteilung von X heißt *hypergeometrische Verteilung*)

   (6 P.)

5. Die *Exponentialverteilung* mit Parameter $\alpha > 0$ ist definiert durch die Verteilungsfunktion

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha x), & \text{falls } x \geq 0\;, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei X eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(4 P.)

6. Von Ulm nach Stuttgart fahren zwei Züge. Insgesamt wollen 1000 Leute mitfahren, und jeder davon wählt zufällig (mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{2}$) einen der beiden Züge aus. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung die Anzahl N der Sitze, die beide Züge haben müssen, so daß mit 99% Sicherheit jeder Fahrgast einen Sitzplatz bekommt.

(4 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. In einer Spielshow hat ein Kandidat drei Türen zur Auswahl, wobei sich nur hinter einer Tür ein Gewinn verbirgt. Nachdem der Kandidat seine Wahl getroffen und dem Spielleiter mitgeteilt hat, öffnet dieser eine davon verschiedene Tür, hinter der sich kein Gewinn verbirgt. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit, bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben, oder seine Wahl zu ändern. Wie sind jeweils seine Gewinnchancen ?

2. Ein Schütze treffe jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p, wobei $0 < p \leq 1$. Es sei X die Nummer des Schusses, bei dem er zum r-ten Mal trifft. Zeigen Sie, daß für $k \geq r$ gilt

$$p(X = k) \;=\; \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}\;,$$

und berechnen Sie den Erwartungswert von X.

3. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } x \in [a,b], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X. (Die Zufallsgröße X heißt *gleichverteilt* auf dem Intervall $[a,b]$.)

4. Man werfe einen idealen Würfel 600 Mal. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, daß die Anzahl der Sechsen im Intervall $[80, 120]$ liegt.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05