SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

2. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik für II Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 29.04.2005, vor den Übungen

1. Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $X := C[a,b]$ der normierte Raum der stetigen Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup f([a,b])$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und stetig ist.

   (4 P.)

2. Zeigen Sie, daß die Menge $\{\sin(xy) + e^{x^2+y} |\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes reelles Intervall ist.

   (4 P.)

3. Es sei $g_k(x_1, x_2) := (x_1^k + x_2)/k^2$, für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie möglichst große Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ so, daß die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ gleichmäßig auf D konvergiert (mit Beweis).

   (4 P.)

4. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit.

   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := (\cos(x_1 + x_2)\ ,\ \log(x_1^2 + e^{x_2}))^{\mathrm{t}}$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

   (iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

   (iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(x_1 x_2)}{n^2}$.

   (je 2 P.)

5. Für einen Multiindex $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir $p! := p_1! \cdot \ldots \cdot p_n!$. Zeigen Sie, daß für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^n$ die Identität

   $$e^{x_1 + \ldots + x_n} = \sum_{p \in \mathbb{N}_0^n} \frac{x^p}{p!}$$

   gilt, und die Potenzreihe konvergiert absolut.

   (4 P.)

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05

Tutoriumsaufgaben

1. Untersuchen Sie folgende Mengen auf Kompaktheit.

   (i) $M = \{(x,y,z)^{\mathrm{t}} |\ x^2 + y^2 + 4z^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   (ii) $M = \{\log(x^2+1)\sin y |\ 0 \le x \le 1,\ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$.

   (iii) $M = \{e^x |\ x \in \mathbb{R}\} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit.

   (i) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ f(z_1,z_2) := \left(e^{z_1^3 z_2 + z_2^2}\ ,\ z_1 \cos z_2\right)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x_1x_2)}{x_1x_2}, & \text{falls } x_1x_2 \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$

   (iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$

3. Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(x_1x_2)^k$ auf gleichmäßige Konvergenz auf der Menge $D := \left\{(x_1,x_2)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 |\ x_1^2 + x_2^2 < \frac{3}{2}\right\}$.