SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

3. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 5.5.2005, vor den Übungen

1. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Funktion f.

   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} \mapsto (e^{x_1 x_2} \cos x_2\ ,\ x_1 + x_2^3)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$.

   (iii) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{1}{\|x\|}\, x$.

   (je 2 P.)

2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^3 + x_1 x_2^2$. Für welche $e \in \mathbb{R}^2$ mit $\|e\| = 1$ wird die Richtungsableitung $f_e(1,1)$ maximal bzw. minimal, und was sind diese Extremwerte? (2 P.)

3. (i) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die differenzierbar im Punkt $a \in U$ sei. Der *Tangentialraum* zur Funktion f an der Stelle a ist definiert durch
$$T_f(a) \ := \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, y = f(a) + f'(a)(x-a) \right\} .$$
(Im Falle $n = 2$ und $m = 1$ spricht man auch von einer *Tangentialebene*.) Zeigen Sie, daß gilt
$$T_f(a) \ = \ \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, (f'(a)\ ,\ -E_m) \cdot \left(z - \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} .$$

   (ii) Bestimmen Sie die Tangentialebene zur Funktion $f(x_1, x_2) := x_1^3 + x_2^4$ an der Stelle $(1,1)^{\mathrm{t}}$. Geben Sie eine Koordinatengleichung und eine Parameterdarstellung der Ebene an. (je 3 P.)

4. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$f(x_1, x_2) \ := \ \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

   (i) Zeigen Sie, daß alle Richtungsableitungen $f_e(x)$ existieren, für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und alle $e \in \mathbb{R}^2$ mit $\|e\| = 1$. Bestimmen Sie speziell die Richtungsableitungen im Punkt $x = (0,0)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt $x = (0,0)^{\mathrm{t}}$.

   (iii) Zeigen Sie, daß die Funktion nicht differenzierbar im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$ ist.

   (je 2 P.)

5. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(tx)}{t}\, \mathrm{d}t$ für $x > 0$. (4 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung. Bestimmen Sie auch alle Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$.

   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y)^{\mathrm{t}} \mapsto (x \log(x^2+y^2+1)\ ,\ ye^x\ ,\ x)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y)^{\mathrm{t}} \mapsto |xy|$.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1,x_2) \ := \ \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4+x_2^2}, & \text{falls } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

   (i) Zeigen Sie, daß alle Richtungsableitungen $f_e(x)$ existieren, für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und alle $e \in \mathbb{R}^2$ mit $\|e\| = 1$. Bestimmen Sie speziell die Richtungsableitungen im Punkt $x = (0,0)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) Zeigen Sie, daß die Funktion nicht differenzierbar im Punkt $(0,0)^{\mathrm{t}}$ ist.

3. Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\int_{e^x}^{x^2} \frac{e^{t^2 x}}{t}\, \mathrm{d}t$ für $x > 0$.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05