SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

4. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 12.5.2005, vor den Übungen

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß für alle $a, b, c, d \in [1, e]$ gilt, daß

$$|(\log a)(\log b) - (\log c)(\log d)| \leq |a - c| + |b - d| \ .$$

(6 P.)

2. Es sei $f(x_1, x_2) := e^{x_1} \sin x_2$.

   (i) Bestimmen Sie $(\nabla h)^k f$ für $k = 0, 1, 2, 3$ und $h = (h_1, h_2)^{\mathrm{t}}$.

   (ii) Zeigen Sie, daß für $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ gilt, daß

$$\left|\left(e^{h_1} \sin h_2\right) - h_2 - h_1 h_2\right| \leq e^{h_1}(|h_1| + |h_2|)^3 \ .$$

(je 3 P.)

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des vereinfachten Newton-Verfahrens eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$2x^3y - x^2y^3 = 0$$
$$3xy^3 + x^3y^2 - 5 = 0$$

in der Nähe des Punktes $(x, y)^{\mathrm{t}} = (1, 1)^{\mathrm{t}}$. Es sei dazu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (2x^3y - x^2y^3, 3xy^3 + x^3y^2 - 5)^{\mathrm{t}}$ und $A := (f'(1, 1))^{-1}$. Man verwende die Rekursionsgleichung

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - A \cdot f(x_n, y_n) \ .$$

Schreibt man dies komponentenweise, so lautet der Maple-Befehl

```
x[1]:=1; y[1]:=1; for n from 1 to 100 do x[n+1]:=evalf(phi(x[n],y[n]));
y[n+1]:=evalf(psi(x[n],y[n])); end do;
```

(6 P.)

4. Es seien $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $0 < \lambda < \frac{1}{b-a}$. Zeigen Sie, daß es genau eine stetige Funktion $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, die der Integralgleichung

$$x(t) \ = \ f(t) + \lambda \int_a^b \sin(t - s) x(s) \, \mathrm{d}s$$

genügt.

(6 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ gilt
$$|(\sin\alpha)(\sin\beta) - (\sin\gamma)(\sin\delta)| \le |\alpha - \gamma| + |\beta - \delta| \ .$$

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $\sum_{k=0}^{2} \frac{(\nabla h)^k f(x)}{k!}$ für die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 + x_2 + x_3^2}$ im Punkt $x = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$.

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des vereinfachten Newtonverfahrens eine Näherungslösung des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} r\sin t - rt\cos t - 1 &= 0 \\ r\cos t + rt\sin t - r - 1 &= 0 \end{aligned}$$
mit Startwert $(r_0, t_0) = (2, 1.2)$.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05