SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

5. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 20.5.2005, vor den Übungen

1. Untersuchen Sie, ob es ein offenes Intervall I mit $1 \in I$ und zwei in I differenzierbare Funktionen f und g gibt mit $f(1) = e$, $g(1) = 0$ und

$$\begin{aligned} x^{f(x)} + \arctan(xg(x)) &= 1 \\ x + f(x) - (f(x))^{g(x)} &= e \end{aligned}$$

für alle $x \in I$. Berechnen Sie gegebenenfalls auch $g'(1)$. (6 P.)

2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$. Weisen Sie nach, daß f in allen Punkten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokal umkehrbar ist. Kann man f sogar global umkehren? (4 P.)

3. Finden Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte† von

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - 10x + xy^2 + 2y^3 \ .$$

Besitzt f ein globales Extremum in der gesamten Ebene? (5 P.)

† Ein stationärer Punkt heißt Sattelpunkt, falls die Hesse-Matrix an diesem Punkt indefinit ist.

4. Begründen Sie, daß es Punkte auf der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gibt, die von dem Punkt $(1, 1, 1)^t$ einen kleinsten bzw. größten Abstand haben, und finden Sie diese.

(3 P.)

5. Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = 2x - y$ auf der Menge

$$\{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 18\}$$

ein globales Maximum besitzt, und berechnen Sie gegebenenfalls dieses Maximum.

(5 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Untersuchen Sie, ob es ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und zwei in I differenzierbare Funktionen f und g gibt mit $f(0) = g(0) = 1$ und

$$\begin{aligned} e^{f(x)-g(x)} &= f(x) + x\sqrt{g(x)} \\ (f(x))^{g(x)} &= (g(x))^{xf(x)} \end{aligned}$$

   für alle $x \in I$. Berechnen Sie gegebenenfalls auch $f'(0)$ und $g'(0)$.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \end{pmatrix}$. Weisen Sie nach, daß f in allen Punkten $\{(\varphi, \vartheta)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 : \vartheta \neq \frac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ lokal umkehrbar ist.
   Berechnen Sie auch $(f^{-1})'\,(\frac{1}{2}, 0)$, wobei f^{-1} die lokale Umkehrfunktion bezüglich des Punktes $(\varphi, \vartheta)^{\mathrm{t}} = (0, \frac{\pi}{3})^{\mathrm{t}}$ bezeichnet.

3. Finden Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte von

$$f(x, y) = x^2 - 4x + xy^2 + y^3 \ .$$

   Besitzt f ein globales Extremum in der gesamten Ebene?

4. Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = e^{x(y+1)}$ auf der Menge

$$\{(x, y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

   ein globales Minimum besitzt, und berechnen Sie gegebenenfalls dieses Minimum.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05