

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 27.5.2005, vor den Übungen

1. Bestimmen Sie jeweils den Inhalt der Menge M .

(i) $M := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $M := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, a \leq y \leq r\}$, wobei $0 < a < r$.

(iii) $M := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, a \leq z \leq r\}$, wobei $0 < a < r$.

(je 2 P.)

2. Es sei

$$M := \{(x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq k\},$$

wobei $k \geq 0$. Zeigen Sie, daß gilt

$$|M| = \frac{k^n}{n!}.$$

(6 P.)

3. Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-meßbare Teilmenge, $a = (a_1, a_2, h)^t \in \mathbb{R}^3$ mit $h > 0$, und K sei der Kegel im \mathbb{R}^3 mit Grundfläche $M \times \{0\}$ und a als Spitze, d.h.

$$K := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ h \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in [0, 1], \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \right\}.$$

Bestimmen Sie den Inhalt von K .

(6 P.)

4. Es sei $K := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| \leq r\}$ eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt 0. Berechnen Sie den Inhalt von K . Sie dürfen dabei verwenden, daß eine Kugel im \mathbb{R}^3 mit Radius s den Inhalt $\frac{4}{3} \pi s^3$ hat.

(6 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Bestimmen Sie jeweils den Inhalt der Menge M .
 - (i) $M := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, (x+r)^2 + y^2 \geq 2r^2\}$, wobei $r > 0$. („Möndchen des Hippokrates“)
 - (ii) $M := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x \leq y \leq z\}$, wobei $r > 0$.
2. Aus der Kugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ wird das zylindrische Loch $\{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq rx\}$ herausgebohrt. Was ist der Inhalt der Restmenge?

**Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05**