SS 2005
Prof. Dr. W. Balser
Andreas Martin, Markus Tentler

7. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 3.6.2005, vor den Übungen

1. Es bezeichne B das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Endpunkten $(0,0)^{\mathrm{t}}$, $(1,0)^{\mathrm{t}}$ und $(1,1)^{\mathrm{t}}$. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \int_B \left(x^2+y^2\right)\, \mathrm{d}(x,y) \qquad \text{(ii)} \int_B \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}(x,y)\ .$$

(je 2 P.)

2. Es sei $B = \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 1\}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_B \frac{x}{y}\, \mathrm{d}(x,y)$.

(3 P.)

3. Berechnen Sie $\displaystyle\int_B f(x)\, \mathrm{d}x$ für

   (i) $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\; e^{-\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, B die rechte Hälfte der Einheitskreisscheibe

   (ii) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 4 \right\}$.

(je 4 P.)

4. Es seien $a, r \geq 0$ und

$$\begin{aligned} K_r &:= \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq r^2,\ x,y \geq 0\} \\ Q_a &:= \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\}\ . \end{aligned}$$

   (i) Rechnen Sie nach, daß

$$\begin{aligned} \int_{K_r} e^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}(x,y) &= \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-r^2}\right) \\ \int_{Q_a} e^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}(x,y) &= \left(\int_0^a e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right)^2\ . \end{aligned}$$

   (ii) Gewinnen Sie hieraus die Identität des Gaußschen Fehlerintegrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\ .$$

(5+4 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Es bezeichne B das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Endpunkten $(0,0)^{\mathrm{t}}$, $(1,0)^{\mathrm{t}}$ und $(1,-1)^{\mathrm{t}}$. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \quad \int_B \left(x+y^2\right) \, \mathrm{d}(x,y) \qquad \text{(ii)} \quad \int_B e^{-x^2} \, \mathrm{d}(x,y) \; .$$

2. (i) Es sei $a<b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Funktion. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche um die x-Achse rotiert.

   (ii) Wenden Sie das Ergebnis aus (i) auf die Funktion $f(x)=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, an.

3. Berechnen Sie $\displaystyle\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$ für

   (i) $$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1^2+x_2^2)\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\;,\quad B=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2: x_1\ge 0,\; 1\le x_1^2+x_2^2\le 3\right\}$$

   (ii) $$f(x_1,x_2,x_3)=1\;,\quad B=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3: \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\le 1\right\}\quad (a,b,c>0)\;.$$

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05