

SS 2005

Prof. Dr. W. Balsler

Andreas Martin, Markus Tentler

8. Übungsblatt

Übungen zur Höheren Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe: Freitag, 10.6.2005, vor den Übungen

1. Bestimmen Sie jeweils die Länge der Kurve γ mit der Parameterdarstellung $x(t)$.

(i) $x(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^t, t \in [0, 2\pi]$. („Zykloide“)

(ii) $x(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)^t, t \in [0, 2\pi n]$, wobei $n \in \mathbb{N}$. (Schraubenlinie)

(je 2 P.)

2. Die *Kardioide* (oder auch *Herzkurve*) ist eine Kurve im \mathbb{R}^2 , definiert durch die Polarkoordinatengleichung $r = 1 + \cos \varphi$. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung dieser Kurve sowie ihre Länge.

(4 P.)

3. Bestimmen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f^t(x) dx$. Ist das Vektorfeld f konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von f .

(i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, y - x)^t, \gamma : x(t) = (t, t^2)^t, t \in [0, 2]$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (3x^2y^2z + 1, 2x^3yz + z, x^3y^2 + y)^t, \gamma : x(t) = (e^t, \cos t, t^2 + 1)^t, t \in [0, \pi]$.

(2+4 P.)

4. Es sei $G := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\}$. Für welche Werte von a erfüllt das Vektorfeld $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \left(\frac{ay}{(x-y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2} + 1, z \right)^t$$

die Integrabilitätsbedingungen? Ist das Vektorfeld f in diesem Fall konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von f .

(4 P.)

5. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) := \log(1 + \|x\|^2)x$.

(i) Ist das Vektorfeld f konservativ?

(ii) Für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ sei γ_y die Verbindungsstrecke von 0 nach y . Bestimmen Sie $\int_{\gamma_y} f^t(x) dx$.

(iii) Bestimmen Sie mit Teil (ii) eine Stammfunktion von f .

(je 2 P.)

Tutoriumsaufgaben

1. Bestimmen Sie jeweils die Länge der Kurve γ mit der Parameterdarstellung $x(t)$.

(i) $x(t) = (t, t^2, t^3)^t, t \in [0, 2]$.

(ii) $x(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t, 1)^t, t \in [0, T]$. (Was passiert bei $T \rightarrow \infty$?)

2. Bestimmen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f^t(x) dx$ für die Kurve γ mit der Parameterdarstellung $x(t)$. Ist das Vektorfeld f konservativ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion von f .

(i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ y^2 - xy \end{pmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^3 \sin x + y^2 \cos x \\ 2y \sin x + z^2 \\ 3z^2 \cos x + 2zy \end{pmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ e^t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix},$
 $t \in [0, 1]$.

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = \|x\|^{-3}x, x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$.

Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/martin/ss05